Cours R. MAILLARD

mathématiques

3e

par
R. MAILLARD
R. CAHEN
E. CARALP

Classiques
Hachette

MATHÉMATIQUES

COURS DE MATHÉMATIQUES

SOUS LA DIRECTION DE M. ROLAND MAILLARD

Inspecteur général de l'Instruction publique.

MATHÉMATIQUES

CLASSE de TROISIÈME

par

R. MAILLARD

avec la collaboration de

E. CARALP
Professeur au Lycée Montaigne
à Paris

et

R. CAHEN
Professeur au Lycée Chaptal
à Paris

Programmes de 1958

CLASSIQUES HACHETTE

79, Bd Saint-Germain, Paris-VIe

PROGRAMMES DU 31 JUILLET 1958
POUR LA CLASSE DE TROISIÈME

ARITHMÉTIQUE

Racine carrée (arithmétique). Racine carrée d'un produit, d'un quotient.

Racine carrée à une unité près, à une approximation décimale donnée : définition; calcul au moyen d'une table de carrés, au moyen de la règle d'extraction arithmétique qui sera donnée sans justification.

Racine carrée (arithmétique) de x^2, x étant un nombre relatif.

ALGÈBRE

I. — Rappel de la définition du quotient exact d'un nombre par un autre; rapport.

Proportions; propriétés élémentaires.

II. — Revision de l'étude des polynomes faite dans la classe de Quatrième.

Division des monômes. Fractions rationnelles. Exercices simples de calcul portant sur des polynomes et des fractions rationnelles.

III. — Repérage d'un point dans un plan par des coordonnées rectangulaires (choix des unités sur les axes).

IV. — Notions de variables et de fonction; exemples. Représentation graphique d'une fonction d'une variable.

Fonction $ax + b$ de la variable x; sens de variation. Représentation graphique.

Mouvement rectiligne uniforme.

V. — Équations et inéquations : position du problème; signification, dans ces problèmes, des signes $=$, $>$, $\geqslant$.

Équation et inéquation du premier degré à une inconnue, à coefficients numériques. Interprétation graphique.

Équation du premier degré à deux inconnues, à coefficients numériques; système de deux équations du premier degré à deux inconnues, à coefficients numériques.

Application à la résolution de quelques problèmes simples.

GÉOMÉTRIE

A. — *Géométrie plane.*

1. Rapport de deux segments. Rapport de deux segments orientés portés par une même droite. Division d'un segment dans un rapport donné (arithmétique et algébrique).

Théorème de Thalès. Application au triangle et au trapèze; étude de la réciproque dans le cas du triangle et du trapèze.

2. Triangles semblables. Cas de similitude.

3. Projections orthogonales.

Relations métriques dans le triangle rectangle.

Rapports trigonométriques (sinus, cosinus, tangente et cotangente) d'un angle aigu. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Valeurs numériques des rapports trigonométriques des angles de 30°, 45°, 60°. Usage de tables de rapports trigonométriques.

4. Relation entre les longueurs des segments joignant un point donné aux points d'intersection d'un cercle avec deux sécantes passant par ce point. Puissance d'un point par rapport à un cercle.

B. — *Géométrie dans l'espace.*

(Les démonstrations ne sont pas exigées, le professeur étant juge de la possibilité de les établir suivant le niveau de sa classe.)

1. Droite et plan. Leur détermination. Leurs positions relatives; parallélisme de droites et de plans.

2. Angle de deux droites de l'espace; orthogonalité.

Plans perpendiculaires à une droite; droites perpendiculaires à un plan.

Angles dièdres; rectiligne d'un dièdre. Angle de deux plans. Plans perpendiculaires.

3. Projection orthogonale sur un plan; projection d'un point, d'une droite, d'un segment.

4. Vecteurs : vecteurs équipollents, vecteurs opposés. Somme géométrique de deux vecteurs.

RÉFLEXIONS SUR LE PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES POUR LA CLASSE DE TROISIÈME

(*Extraits des Instructions générales*).

A chacun des chapitres d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie, peuvent manifestement être rattachés, à titre d'introduction comme à titre d'applications, des « travaux pratiques » dont beaucoup sont suggérés par le libellé même du programme. Sans entrer dans le détail, il convient de mentionner quelques points :

En *arithmétique,* l'emploi d'une « table de carrés » pour le calcul d'une racine carrée approchée doit intervenir fréquemment, car il familiarise avec un mode de travail d'une portée très générale; il importe de remarquer, à ce sujet, qu'il ne s'agit pas nécessairement d'une « table » toute faite, mise à la disposition de l'élève; il est, au contraire, très intéressant de montrer comment, par quelques opérations, conduites d'une façon réfléchie et méthodique, on peut obtenir le résultat cherché à l'aide « d'encadrements » successifs (la « table de carrés » sera alors bâtie peu à peu, pour les besoins du problème, et ne comportera que les nombres qui se révéleront utiles).

En *algèbre,* le chapitre des polynomes et des fractions rationnelles comporte des remarques analogues à celles qui ont été faites pour la classe de Quatrième. Il en est de même pour les équations et les inéquations. Il convient d'observer que l'étude d'une équation du premier degré à deux inconnues doit permettre de faire bien comprendre ce qu'est une « solution » d'une telle équation; l'étude d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues sera alors grandement facilitée.

Il est à peine utile d'insister sur l'importance des notions relatives au *repérage d'un point d'un plan* à l'aide de coordonnées rectangulaires, et à la représentation graphique d'une fonction d'une variable. La question du choix des unités sur chacun des axes de coordonnées doit être abordée dès ce moment; d'ailleurs, bien des exemples usuels de fonctions feront intervenir des variables dont les valeurs numériques proviendront de la mesure de grandeurs de natures différentes.

Des « *travaux pratiques* » propres à illustrer les chapitres du programme de géométrie sont faciles à imaginer, puisqu'il s'agit en géométrie plane, du théorème de Thalès et des figures semblables, dont l'étude est préparée, en algèbre, par celle des rapports et des proportions, — puis, en géométrie dans l'espace, de la présentation des premières notions sur les droites et les plans : positions

relatives, parallélisme, angles, orthogonalité. Il va sans dire que ce premier contact avec une théorie des éléments de l'espace doit, à ce niveau, être préparé, et constamment contrôlé, en faisant appel à l'observation, à des réalisations effectives, même si l'on ne dispose point d'un matériel spécial (un examen attentif d'objets usuels permet de dégager et d'illustrer bien des notions).

***

Les programmes de mathématiques de Quatrième et de Troisième étendent le champ des possibilités offertes aux débutants, par l'introduction des êtres de l'algèbre, et par une connaissance plus approfondie des êtres de la géométrie. Il est donc recommandé, dans ces classes, de faire largement appel aux *faits astronomiques*, réguliers ou exceptionnels, qui se présentent en abondance à l'observateur curieux, toutes les fois qu'ils peuvent, dans quelque chapitre du cours de mathématiques, constituer une application ou servir d'illustration.

Une énumération de phénomènes astronomiques, prolongeant celle qui figure sous la rubrique « travaux pratiques » dans les programmes de Sixième et de Cinquième, risquerait de paraître prétentieuse, car elle ferait, au moins implicitement, intervenir des notions dont l'étude méthodique ne peut être entreprise à ce niveau. Il suffit donc d'insister sur l'importance d'une initiation, dès cet âge, à la connaissance de l'univers, initiation préparée tout naturellement par le cours de géographie de Sixième, mais qui doit se poursuivre (hors programme, et sans préoccupation d'examen) en toutes occasions, et le professeur de mathématiques averti ne manquera pas d'en découvrir, voire d'en faire naître.

Il va sans dire que rien n'empêche de revenir, en Quatrième et en Troisième, sur les faits et sur les phénomènes astronomiques figurant sous la rubrique « travaux pratiques » en Sixième et en Cinquième; bien au contraire, car il est évident que l'outillage mathématique plus complet, qui est mis progressivement à la disposition des élèves, permettra fréquemment une étude renouvelée et plus poussée de certaines questions déjà abordées antérieurement. A titre de simple suggestion, étant toujours bien entendu qu'il ne s'agit point d'un programme de connaissances imposées, il semble que l'on puisse citer, comme complément aux indications données pour la Sixième et la Cinquième, les quelques notions suivantes, susceptibles de donner lieu à des exercices intéressants dans le premier cycle : coordonnées équatoriales; éclipses; diamètres apparents, parallaxes, mesure des distances de quelques astres; description sommaire du système solaire (cette liste n'est pas limitative, et ne comporte aucune indication d'ordre, ou de répartition dans le temps, ou de rattachement à tel ou tel chapitre d'algèbre ou de géométrie).

PRÉFACE

Le *présent ouvrage est conforme aux nouveaux programmes de Mathématiques pour la classe de 3e prescrits par l'arrêté du 31 juillet 1958.*

***

La présentation des chapitres et les méthodes utilisées sont les mêmes que dans les ouvrages de 6e, 5e et 4e. En particulier, on trouvera, à la fin de chaque division de chapitre, des Applications *simples et, après chaque chapitre, des exercices et problèmes classés* ★, ★★, ★★★ *suivant un ordre de difficulté croissante. Certains de ces exercices sont résolus.*

***

La typographie utilise deux couleurs dont l'une, rouge, a été employée avec discrétion. Il s'agit soit d'alléger le tracé de certaines figures ou d'attirer l'attention sur une partie essentielle de cette figure, soit de signaler des résultats importants, soit enfin de faire apparaître nettement aux yeux ce qui est ☆*DÉFINITION et ce qui est* ▪ *THÉORÈME.*

***

Nous avons profité largement de la liberté qui est laissée au professeur pour exposer les divers chapitres du programme dans l'ordre qui semble le meilleur. Il est bien évident que c'est uniquement pour des commodités de présentation que, dans la rédaction des programmes, on trouve réunis, en Algèbre, *le calcul algébrique et l'étude de la fonction* $y = ax + b$ *et que l'on rencontre ensuite, en* Géométrie, *le théorème de* Thalès.

Nous avons donc modifié l'ordre du programme pour permettre un enchaînement logique des idées. La modification la plus importante est l'introduction du théorème de Thalès *avant l'étude de la fonction* $y = ax + b$*. Le rapport de deux segments orientés portés par une même droite ayant été étudié, son emploi joint à celui des parallèles équidistantes suffit pour établir le théorème de* Thalès *et en permettre l'application à la représentation graphique de la fonction* $y = ax + b$*. On ne peut repousser cette étude en fin d'année et il convient de la traiter logiquement sans avoir à admettre des notions qui seraient exposées dans des chapitres ultérieurs. Nous ne voyons que des avantages à rapprocher ainsi des questions essentielles qui sont intimement liées et que l'on a tort, souvent, de séparer arbitrairement. Mais, nous accueillerons avec reconnaissance les réflexions que cette disposition nouvelle des matières du programme pourra suggérer à nos collègues.*

* * *

Le programme de la classe de Troisième comporte une partie de Géométrie dans l'espace. Il s'agit d'une présentation des premières notions sur les droites et les plans. Les Instructions précisent que « ce premier contact avec une théorie des éléments de l'espace doit, à ce niveau, être préparé et constamment contrôlé, en faisant appel à l'observation et à des réalisations effectives ».

Il n'est pas nécessaire, pour cela, de disposer d'un matériel spécial; un examen attentif d'objets usuels permet de dégager et d'illustrer bien des notions. C'est dans cette intention qu'ont été réalisées, à la fin de ce fascicule, quelques figures qui rendront plus accessible aux élèves la notion de l'espace et les inciteront à en dessiner d'autres, au gré de leur imagination, en combinant des droites et des plans.

C'est parce qu'il n'est question que d'une initiation aux formes des figures de l'espace et aux mots qui permettent de les exprimer que les professeurs seront libres de juger, selon le niveau de la classe, jusqu'où ils peuvent avancer sans imprudence dans les justifications logiques qui accompagnent un tel enseignement.



En Astronomie, nous nous sommes conformés aux indications contenues dans les commentaires des Instructions et nous avons surtout songé à suggérer à nos collègues des sujets dont ils restent libres de diminuer ou d'augmenter le développement.



D'une manière générale, nous avons traité les matières du programme sans les déborder (si quelques revisions ont été jugées indispensables, nous les avons réduites à l'essentiel en les accompagnant de nombreux exercices). Ainsi : les coefficients qui interviennent dans les équations ou les inéquations sont numériques; il n'a pas été question, même sur des exemples, d'équations « irrationnelles »; les problèmes de « constructions » ont été écartés; l'expression « équation d'une droite » n'a pas été utilisée (le programme précise uniquement : représentation graphique de la fonction $y = ax + b$); l'emploi de « propriété caractéristique », de « condition nécessaire et suffisante » a été réservé (ce n'est qu'en classe de Seconde que l'on se risquera d'en parler; jusque-là il est aussi simple et souvent plus clair d'énoncer, lorsque l'on en ressent le besoin, les deux propositions : directe et réciproque).



Nous recevrons avec reconnaissance les observations que nos collègues voudront bien nous communiquer et nous les remercions par avance.

LES AUTEURS.

MATHÉMATIQUES

CHAPITRE I

RACINE CARRÉE

I. CARRÉS

Travaux pratiques d'initiation.

1° Rappeler la définition du carré d'un nombre. Comment écrit-on le carré du nombre a?

Quel est le carré de $\frac{3}{7}$, de 0,5 ?

2° Rappeler les règles de calcul :

$$(abc)^2 = \ldots; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{\ldots}{\ldots};$$

3° Écrire les carrés des nombres entiers de 0 à 10 et calculer les différences des carrés des nombres consécutifs

Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Carré	0	1	4	9	16					81	100
Différence des carrés		1	3	5	7						19

Que dire de la suite des nombres de la dernière ligne du tableau?

4° Démontrer que l'on a : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, (1)

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, (2)

$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, (3)

et se servir de (3) pour justifier les résultats du 3°.

1. ☆ DÉFINITION. — ***On appelle carré d'un nombre le produit de deux facteurs égaux à ce nombre.***

EXEMPLES. Le carré de 4 est : $4 \times 4 = 16$.
Le carré de 2,7 est : $2{,}7 \times 2{,}7 = 7{,}29$.
Le carré de $\frac{5}{7}$ est : $\frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{25}{49}$.

Le carré du nombre a s'écrit a^2.

EXEMPLES. Les carrés de 4, de 2,7, de $\frac{5}{7}$,
s'écrivent respectivement : 4^2; $(2{,}7)^2$; $\left(\frac{5}{7}\right)^2$.

2. Carré d'un produit de facteurs. — On a vu en classe de Quatrième que :

$$(abc)^2 = (abc) \times (abc) = a \times b \times c \times a \times b \times c$$
$$= (a \times a) \times (b \times b) \times (c \times c).$$

$$(abc)^2 = a^2b^2c^2$$

▪ RÈGLE. — ***Le carré d'un produit de facteurs est égal au produit des carrés des facteurs.***

EXEMPLES. I. Soit le nombre 140. On peut écrire :

$$140 = 14 \times 10.$$

Donc : $(140)^2 = 14^2 \times 10^2 = 196 \times 100.$

II. De même, on a :

$$(300)^2 = (3 \times 10^2)^2 = 3^2 \times 10^4 = 9 \times 10\,000$$
$$(5\,000)^2 = (5 \times 10^3)^2 = 25 \times 10^6 = 25 \times 1\,000\,000.$$

On a appliqué la règle $(a^m)^p = a^{mp}$ étudiée en classe de Quatrième.

3. Carré d'une fraction. — En utilisant la définition du carré, on obtient :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b},$$

ou :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

EXEMPLE. $$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}.$$

Si la fraction donnée est irréductible, la règle précédente fournit son carré sous la forme d'une fraction irréductible. En effet, si les nombres entiers a et b n'ont pas de facteurs premiers communs, leurs carrés a et b n'en ont pas non plus.

Le carré de $\frac{a}{10}$ est $\frac{a^2}{100}$.

Le carré de $\frac{b}{100}$ est $\frac{b^2}{10\,000}$.

Le carré de $\frac{c}{1\,000}$ est $\frac{c^2}{1\,000\,000}$.

EXEMPLES. On a : $(87)^2 = 7\,569.$

Par suite : $(8,7)^2 = \frac{7\,569}{100} = 75,69$

$$(0,87)^2 = \frac{7\,569}{10\,000} = 0,756\,9$$

$$(0,087)^2 = \frac{7\,569}{1\,000\,000} = 0,007\,569.$$

4. Carrés de deux entiers consécutifs. — Rappelons l'identité suivante, établie dans la classe de Quatrième :

(1) $$(x + y)^2 \equiv x^2 + 2\,xy + y^2.$$

Si l'on donne à x une valeur entière n et à y la valeur 1, on obtient :

(2) $$\boldsymbol{(n + 1)^2 = n^2 + 2\,n + 1}$$

que l'on peut écrire :

(3) $$\boldsymbol{(n + 1)^2 - n^2 = 2\,n + 1}$$

ou encore :

(4) $$\boldsymbol{(n + 1)^2 - n^2 = n + (n + 1)}$$

Nous énoncerons :

■ THÉORÈME. — ***La différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égale :***
1° à la somme du double du plus petit et de l'unité;
2° à la somme des deux nombres.

EXEMPLE.

$$26^2 - 25^2 = 2 \times 25 + 1 = 51$$
$$= 25 + 26 = 51.$$

5. Table de carrés des nombres entiers. — Il importe de connaître par cœur les carrés des 10 premiers nombres entiers.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

On pourrait prolonger indéfiniment ce tableau en calculant directement le carré de tout nombre entier par la multiplication de ce nombre par lui-même. Nous allons montrer qu'il est plus facile de calculer ces carrés de proche en proche.

En utilisant le théorème du n° 4, on obtient :

$$11^2 = 10^2 + 21 = 121; \quad 101^2 = 100^2 + 201 = 10\,201;$$
$$12^2 = 11^2 + 23 = 144; \quad 102^2 = 101^2 + 203 = 10\,404;$$
$$13^2 = 12^2 + 25 = 169; \quad 103^2 = 102^2 + 205 = 10\,609.$$

Il est utile de connaître par cœur les carrés des nombres de 10 à 20.

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

On trouvera, pages 10 à 13, une table donnant les carrés des nombres de 100 à 1 000. Les deux premiers chiffres du nombre sont dans la colonne de gauche; le chiffre des unités figure en haut de la page, en tête de colonne. Le carré du nombre est écrit à l'intersection de la ligne qui porte les deux premiers chiffres et de la colonne en haut de laquelle est le chiffre des unités.

EXEMPLE. Le carré du nombre 314 se trouve à l'intersection de la ligne 31 et de la colonne 4, soit 98 596.

Les carrés successifs qui sont dans cette table vont de 10 000 à 1 000 000. Ils ont donc 5 ou 6 chiffres et se suivent, en croissant, sur une même ligne.

• REMARQUE. Les carrés des nombres de 1 à 100 se déduisent de la lecture de la table.

Par exemple, la table indique que : $(290)^2 = 84\,100$.

On a donc : $(29)^2 = 841$.

6. Extensions de la table. — 1° *Proposons-nous d'étendre la table au-delà de 1 000*; par exemple, de calculer les carrés des nombres entiers de 3 720 à 3 725. Nous remarquons d'abord que l'on a :

$$(3\,720)^2 = (372 \times 10)^2 = (372)^2 \times 100 = 13\,838\,400.$$

Nous utiliserons le théorème du n° 4. La seule difficulté est que les nombres en cause sont assez longs à écrire, mais les écritures sont certainement plus rapides que les multiplications que l'on devrait faire si l'on recourait à un calcul direct.

n	n^2	$2n + 1$	$(n + 1)^2$
3 720	13 838 400	7 441	13 845 841
3 721	13 845 841	7 443	13 853 284
3 722	13 853 284	7 445	13 860 729
3 723	13 860 729	7 447	13 868 176
3 724	13 868 176	7 449	13 875 625
3 725	13 875 625		

2° *Carrés de nombres décimaux*. Le carré de $\frac{n}{10}$ est $\frac{n^2}{100}$. Or, si on divise par 10 les nombres entiers consécutifs compris entre 1 et 1 000, on trouve, de dixième en dixième, les nombres compris entre 0,1 et 100. On aura donc les carrés de ces derniers nombres en divisant par 100 les carrés inscrits dans la table.

De la même façon, on aura les carrés des nombres, de centième en centième, compris entre 0,01 et 10 en divisant par 10 000 les carrés inscrits dans la table et on aura les carrés des nombres, de millième en millième, compris entre 0,001 et 1 en divisant par 10^6 les carrés inscrits dans la table et ainsi de suite.

EXEMPLES. On lit dans la table : $(617)^2 = 380\,689$;
donc : $(61{,}7)^2 = 3\,806{,}89$; $(6{,}17)^2 = 38{,}068\,9$; $(0{,}617)^2 = 0{,}380\,689$.

3° *Carré d'un nombre dont le chiffre des unités est* 5. Si d est le nombre des dizaines d'un nombre N et 5 le chiffre de ses unités, on a :

$$N = 10\,d + 5.$$

On en déduit : $N^2 = (10\,d + 5)^2 = 100\,d^2 + 100\,d + 25,$ (1)

ou : $$\boldsymbol{N^2 = 100\,d\,(d+1) + 25} \qquad (2)$$

Par suite $d\,(d + 1)$ est le nombre de centaines de N^2; on remarque que $d(d + 1)$ est le produit des deux nombres entiers consécutifs d et $d + 1$. Le chiffre des dizaines de N^2 est 2, le chiffre des unités est 5. Nous n'énoncerons pas la règle. Il suffit, en pratique, d'appliquer la formule (2).

EXEMPLE. Pour calculer $(125)^2$ on écrira :

$$(125)^2 = 12 \times 13 \times 100 + 25 = 15\,600 + 25 = 15\,625.$$

- **Applications.**

1. — *Calculer* mentalement *les carrés des nombres suivants :*

1° 21; 33; 51; 92; 103.
2° 1,9; 2,9; 3,8; 4,7; 9,9.
(¶ $(51)^2 = (50 + 1)^2$.)

2. — *Calculer* mentalement *les carrés des nombres suivants :*

1° 15; 25; 35; 45; 55.
2° 6,5; 7,5; 8,5; 9,5; 10,5.
(¶ *Utiliser la remarque du n°* 6, 3° : $(35)^2 = 3 \times 4 \times 100 + 25 = 1\,225$.)

3. — *En utilisant l'identité :* $(x + y)(x - y) \equiv (x^2 - y^2)$, *calculer* mentalement *les produits suivants :*

1° 31×29; 33×27; 58×42; 59×61.
2° 73×67; 92×88; 55×45; 84×76.

4. — *Dresser la table des carrés des nombres, de dixième en dixième, compris entre :*

1° 217 et 218; 2° 263 et 264.

Peut-on utiliser la table de carrés du livre pour obtenir cette nouvelle table ?

5. — *Dresser la table des carrés des nombres, de centième en centième, compris entre :*

1° 21,4 et 21,5; 2° 47,8 et 47,9.

Peut-on utiliser la table de carrés du livre pour obtenir cette nouvelle table ?

6. — *Dresser la table des carrés des nombres, de millième en millième, compris entre :*

1° 2,77 et 2,78; 2° 7,35 et 7,36.

Peut-on utiliser la table de carrés du livre pour obtenir cette nouvelle table ?

II. CARRÉS PARFAITS

Travaux pratiques d'initiation.

1° Calculer le carré du produit : $2 \times 3^2 \times 5^3$ en laissant le carré sous la forme d'un produit de facteurs premiers. Que remarque-t-on sur les exposants des facteurs du produit?

2° Puisque : $5^2 = 25$, on dit que 5 est la racine carrée de 25 et l'on écrit : $5 = \sqrt{25}$.
Calculer $\sqrt{100}$; $\sqrt{10^6}$.

3° On convient d'écrire :

$0,5 = \sqrt{0,25}$ pour exprimer que $0,25 = (0,5)^2$.

Calculer $\sqrt{0,81}$; $\sqrt{0,01}$.

4° A l'aide de la table, calculer :

$$\sqrt{40\,804}\ ; \qquad \sqrt{249,64}\ ; \qquad \sqrt{0,201\,601}.$$

7. ☆ DÉFINITION. — ***On dit qu'un nombre entier est carré parfait pour exprimer qu'il est le carré d'un autre nombre entier.***

Exemples. 25, 64, 49 sont des carrés parfaits.

Il peut être important de *reconnaître si un nombre entier donné est un carré parfait*. A cet effet, nous savons que le carré du nombre :

$$a = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

est :

$$a^2 = (2^3 \times 3^2 \times 7)^2 = 2^6 \times 3^4 \times 7^2.$$

Les facteurs premiers de a^2 sont donc ceux de a et les exposants sont doublés. Il en résulte que, *si un nombre A est carré parfait, les exposants qui figurent dans la décomposition de A en un produit de facteurs premiers sont tous pairs.*

Inversement, soit le nombre :

$$B = 2^8 \times 5^2 \times 11^2,$$

où les exposants des facteurs premiers sont tous pairs.

Appelons b le nombre obtenu en faisant le produit des mêmes facteurs premiers, mais en divisant par 2 tous les exposants :

$$b = 2^4 \times 5 \times 11.$$

D'après ce qu'on vient de voir, on a : $b^2 = B$.

▪ THÉORÈME. — ***Un nombre entier A est un carré parfait si, dans sa décomposition en un produit de facteurs premiers, les exposants des facteurs sont tous pairs, et dans ce cas seulement.***

8. Racine carrée d'un carré parfait.

☆ DÉFINITION. — ***On appelle* racine carrée *d'un carré parfait A le nombre a dont le carré a^2 est égal au carré parfait donné A.***

EXEMPLE. 4 est la racine carrée de 16, car $4^2 = 16$.

On écrit : $16 = \sqrt{256}$

et on lit : 16 égale racine carrée de 256.

Le symbole $\sqrt{}$ est appelé *radical*.

D'une manière générale, on écrira, par convention :

$a = \sqrt{A}$ pour exprimer que l'on a : $a^2 = A$

9. Nombre décimal carré d'un autre nombre décimal. — Soit un nombre décimal quelconque, par exemple 1,34. Ce nombre a deux chiffres décimaux, le dernier à droite n'étant pas un zéro. Pour calculer son carré, on calcule le carré de 134 qui est 17 956 et on sépare quatre chiffres décimaux, ce qui donne 1,795 6. Ce nombre a quatre chiffres décimaux, le dernier à droite n'étant pas un zéro, et, si l'on fait abstraction de la virgule, le nombre obtenu est un carré parfait.

Inversement, soit un nombre décimal ayant un nombre pair de chiffres décimaux, le dernier à droite n'étant pas un zéro, et tel que le nombre entier obtenu en ne tenant pas compte de la virgule soit un carré parfait. Par exemple soit le nombre :

$$0{,}0193\,21.$$

La table des carrés montre que le nombre 19 321 est un carré parfait :

$$19\,321 = (139)^2.$$

La règle de multiplication des nombres décimaux montre alors que :

$$0{,}139 \times 0{,}139 = 0{,}019\,321.$$

Le nombre donné est donc le carré du nombre décimal 0,139.

▪ THÉORÈME. — ***Un nombre décimal est égal au carré d'un nombre décimal si, abstraction faite des zéros qui le terminent, il a un nombre pair de chiffres décimaux et si le nombre entier obtenu en supprimant la virgule est un carré parfait, et dans ce cas seulement.***

Nous dirons encore que 0,139 est la racine carrée du nombre 0,019 321 et nous écrirons :

$$0{,}139 = \sqrt{0{,}019\,321}.$$

EXEMPLES. On a :

$$\sqrt{0{,}09} = 0{,}3; \qquad \sqrt{2{,}25} = 1{,}5.$$

10. Fraction égale au carré d'une autre fraction. — Le carré de la fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^2}{b^2}$. Donc, lorsqu'une fraction est le carré d'une autre fraction, ses deux termes sont des carrés parfaits.

Inversement, il est évident que la fraction $\frac{a^2}{b^2}$ est le carré de la fraction $\frac{a}{b}$.

Ce caractère peut être masqué. Par exemple, les deux termes de la fraction $\frac{8}{18}$ ne sont pas des carrés parfaits. Mais cette fraction est égale à la fraction $\frac{4}{9}$ qui est le carré de $\frac{2}{3}$.

▪ THÉORÈME. — ***Une fraction est égale au carré d'une autre fraction si l'on peut trouver une fraction égale à la première dont les termes sont des carrés parfaits, et dans ce cas seulement.***

Nous dirons encore que la fraction $\frac{2}{3}$ est la racine carrée de la fraction $\frac{8}{18}$ et nous écrirons :

$$\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{8}{18}}.$$

11. Résumé. — Chaque fois qu'un nombre A, entier ou fractionnaire, est le carré d'un autre nombre a entier ou fractionnaire, c'est-à-dire si :

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}^2$$

on convient d'écrire aussi :

$$\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{A}}$$

et on dit que a est la racine carrée exacte de A.

Nous dirons aussi que A est un carré exact, en réservant le mot carré parfait pour le cas où A est entier. Un carré parfait est naturellement un carré exact.

EXEMPLES. 16 est un carré parfait : $16 = 4^2$.
0,49 est un carré exact : $0{,}49 = (0{,}7)^2$.
$\frac{4}{9}$ est un carré exact : $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

N	0	1	2	3	4
10	10 000	10 201	10 404	10 609	10 816
11	12 100	12 321	12 544	12 769	12 996
12	14 400	14 641	14 884	15 129	15 376
13	16 900	17 161	17 424	17 689	17 956
14	19 600	19 881	20 164	20 449	20 736
15	22 500	22 801	23 104	23 409	23 716
16	25 600	25 921	26 244	26 569	26 896
17	28 900	29 241	29 584	29 929	30 276
18	32 400	32 761	33 124	33 489	33 856
19	36 100	36 481	36 864	37 249	37 636
20	40 000	40 401	40 804	41 209	41 616
21	44 100	44 521	44 944	45 369	45 796
22	48 400	48 841	49 284	49 729	50 176
23	52 900	53 361	53 824	54 289	54 756
24	57 600	58 081	58 564	59 049	59 536
25	62 500	63 001	63 504	64 009	64 516
26	67 600	68 121	68 644	69 169	69 696
27	72 900	73 441	73 984	74 529	75 076
28	78 400	78 961	79 524	80 089	80 656
29	84 100	84 681	85 264	85 849	86 436
30	90 000	90 601	91 204	91 809	92 416
31	96 100	96 721	97 344	97 969	98 596
32	102 400	103 041	103 684	104 329	104 976
33	108 900	109 561	110 224	110 889	111 556
34	115 600	116 281	116 964	117 649	118 336
35	122 500	123 201	123 904	124 609	125 316
36	129 600	130 321	131 044	131 769	132 496
37	136 900	137 641	138 384	139 129	139 876
38	144 400	145 161	145 924	146 689	147 456
39	152 100	152 881	153 664	154 449	155 236
40	160 000	160 801	161 604	162 409	163 216
41	168 100	168 921	169 744	170 569	171 396
42	176 400	177 241	178 084	178 929	179 776
43	184 900	185 761	186 624	187 489	188 356
44	193 600	194 481	195 364	196 249	197 136
45	202 500	203 401	204 304	205 209	206 116
46	211 600	212 521	213 444	214 369	215 296
47	220 900	221 841	222 784	223 729	224 676
48	230 400	231 361	232 324	233 289	234 256
49	240 100	241 081	242 064	243 049	244 036

N	5	6	7	8	9
10	11 025	11 236	11 449	11 664	11 881
11	13 225	13 456	13 689	13 924	14 161
12	15 625	15 876	16 129	16 384	16 641
13	18 225	18 496	18 769	19 044	19 321
14	21 025	21 316	21 609	21 904	22 201
15	24 025	24 336	24 649	24 964	25 281
16	27 225	27 556	27 889	28 224	28 561
17	30 625	30 976	31 329	31 684	32 041
18	34 225	34 596	34 969	35 344	35 721
19	38 025	38 416	38 809	39 204	39 601
20	42 025	42 436	42 849	43 264	43 681
21	46 225	46 656	47 089	47 524	47 961
22	50 625	51 076	51 529	51 984	52 441
23	55 225	55 696	56 169	56 644	57 121
24	60 025	60 516	61 009	61 504	62 001
25	65 025	65 536	66 049	66 564	67 081
26	70 225	70 756	71 289	71 824	72 361
27	75 625	76 176	76 729	77 284	77 841
28	81 225	81 796	82 369	82 944	83 521
29	87 025	87 616	88 209	88 804	89 401
30	93 025	93 636	94 249	94 864	95 481
31	99 225	99 856	100 489	101 124	101 761
32	105 625	106 276	106 929	107 584	108 241
33	112 225	112 896	113 569	114 244	114 921
34	119 025	119 716	120 409	121 104	121 801
35	126 025	126 736	127 449	128 164	128 881
36	133 225	133 956	134 689	135 424	136 161
37	140 625	141 376	142 129	142 884	143 641
38	148 225	148 996	149 769	150 544	151 321
39	156 025	156 816	157 609	158 404	159 201
40	164 025	164 836	165 649	166 464	167 281
41	172 225	173 056	173 889	174 724	175 561
42	180 625	181 476	182 329	183 184	184 041
43	189 225	190 096	190 969	191 844	192 721
44	198 025	198 916	199 809	200 704	201 601
45	207 025	207 936	208 849	209 764	210 681
46	216 225	217 156	218 089	219 024	219 961
47	225 625	226 576	227 529	228 484	229 441
48	235 225	236 196	237 169	238 144	239 121
49	245 025	246 016	247 009	248 004	249 001

N	0	1	2	3	4
50	250 000	251 001	252 004	253 009	254 016
51	260 100	261 121	262 144	263 169	264 196
52	270 400	271 441	272 484	273 529	274 576
53	280 900	281 961	283 024	284 089	285 156
54	291 600	292 681	293 764	294 849	295 936
55	302 500	303 601	304 704	305 809	306 916
56	313 600	314 721	315 844	316 969	318 096
57	324 900	326 041	327 184	328 329	329 476
58	336 400	337 561	338 724	339 889	341 056
59	348 100	349 281	350 464	351 649	352 836
60	360 000	361 201	362 404	363 609	364 816
61	372 100	373 321	374 544	375 769	376 996
62	384 400	385 641	386 884	388 129	389 376
63	396 900	398 161	399 424	400 689	401 956
64	409 600	410 881	412 164	413 449	414 736
65	422 500	423 801	425 104	426 409	427 716
66	435 600	436 921	438 244	439 569	440 896
67	448 900	450 241	451 584	452 929	454 276
68	462 400	463 761	465 124	466 489	467 856
69	476 100	477 481	478 864	480 249	481 636
70	490 000	491 401	492 804	494 209	495 616
71	504 100	505 521	506 944	508 369	509 796
72	518 400	519 841	521 284	522 729	524 176
73	532 900	534 361	535 824	537 289	538 756
74	547 600	549 081	550 564	552 049	553 536
75	562 500	564 001	565 504	567 009	568 516
76	577 600	579 121	580 644	582 169	583 696
77	592 900	594 441	595 984	597 529	599 076
78	608 400	609 961	611 524	613 089	614 656
79	624 100	625 681	627 264	628 849	630 436
80	640 000	641 601	643 204	644 809	646 416
81	656 100	657 721	659 344	660 969	662 596
82	672 400	671 041	675 684	677 329	678 976
83	688 900	690 561	692 224	693 889	695 556
84	705 600	707 281	708 964	710 649	712 336
85	722 500	724 201	725 904	727 609	729 316
86	739 600	741 321	743 044	744 769	746 496
87	756 900	758 641	760 384	762 129	763 876
88	774 400	776 161	777 924	779 689	781 456
89	792 100	793 881	795 664	797 449	799 236
90	810 000	811 801	813 604	815 409	817 216
91	828 100	829 921	831 744	833 569	835 396
92	846 400	848 241	850 084	851 929	853 776
93	864 900	866 761	868 624	870 489	872 356
94	883 600	885 481	887 364	889 249	891 136
95	902 500	904 401	906 304	908 209	910 116
96	921 600	923 521	925 444	927 369	929 296
97	940 900	942 841	944 784	946 729	948 676
98	960 400	962 361	964 324	966 289	968 256
99	980 100	982 081	984 064	986 049	988 036

N	5	6	7	8	9
50	255 025	256 036	257 049	258 064	259 081
51	265 225	266 256	267 289	268 324	269 361
52	275 625	276 676	277 729	278 784	279 841
53	286 225	287 296	288 369	289 444	290 521
54	297 025	298 116	299 209	300 304	301 401
55	308 025	309 136	310 249	311 364	312 481
56	319 225	320 356	321 489	322 624	323 761
57	330 625	331 776	332 929	334 084	335 241
58	342 225	343 396	344 569	345 744	346 921
59	354 025	355 216	356 409	357 604	358 801
60	366 025	367 236	368 449	369 664	370 881
61	378 225	379 456	380 689	381 924	383 161
62	390 625	391 876	393 129	394 384	395 641
63	403 225	404 496	405 769	407 044	408 321
64	416 025	417 316	418 609	419 904	421 201
65	429 025	430 336	431 649	432 964	434 281
66	442 225	443 556	444 889	446 224	447 561
67	455 625	456 976	458 329	459 684	461 041
68	469 225	470 596	471 969	473 344	474 721
69	483 025	484 416	485 809	487 204	488 601
70	497 025	498 436	499 849	501 264	502 681
71	511 225	512 656	514 089	515 524	516 961
72	525 625	527 076	528 529	529 984	531 441
73	540 225	541 696	543 169	544 644	546 121
74	555 025	556 516	558 009	559 504	561 001
75	570 025	571 536	573 049	574 564	576 081
76	585 225	586 756	588 289	589 824	591 361
77	600 625	602 176	603 729	605 284	606 841
78	616 225	617 796	619 369	620 944	622 521
79	632 025	633 616	635 209	636 804	638 401
80	648 025	649 636	651 249	652 864	654 481
81	664 225	665 856	667 489	669 124	670 761
82	680 625	682 276	683 929	685 584	687 241
83	697 225	698 896	700 569	702 244	703 921
84	714 025	715 716	717 409	719 104	720 801
85	731 025	732 736	734 449	736 164	737 881
86	748 225	749 956	751 689	753 424	755 161
87	765 625	767 376	769 129	770 884	772 641
88	783 225	684 996	786 769	788 544	790 321
89	801 025	802 816	804 609	806 404	808 201
90	819 025	820 836	822 649	824 464	826 281
91	837 225	839 056	840 889	842 724	844 561
92	855 625	857 476	859 329	861 184	863 041
93	874 225	876 096	877 969	879 844	881 721
94	893 025	894 916	896 809	898 704	900 601
95	912 025	913 936	915 849	917 764	919 681
96	931 225	933 156	935 089	937 024	938 961
97	950 625	952 576	954 529	956 484	958 441
98	970 225	972 196	974 169	976 144	978 121
99	990 025	992 016	994 009	996 004	998 001

12. Emploi de la table. Problème I. — *Trouver les carrés de* 272, *de* 27,2 *et de* 2,72.

La table donne : $(272)^2 = 73\,984.$

Par suite (n° 6) : $(27,2)^2 = 739,84$

$(2,72)^2 = 7,398\,4.$

Problème II. — *Trouver les racines carrées exactes de* 140 625, *de* 1 406,25 *et de* 14,062 5.

La table donne : $140\,625 = (375)^2,$

donc : $\sqrt{140\,625} = 375.$

Par suite (n° 9) : $\sqrt{1\,406,25} = 37,5$

$\sqrt{14,062\,5} = 3,75.$

13. Racine carrée d'un produit. — Supposons que deux nombres A et B soient les carrés respectifs de deux nombres a et b (entiers, décimaux ou fractionnaires) en sorte que :

$$A = a^2; \qquad B = b^2,$$

ou :

$$a = \sqrt{A}; \qquad b = \sqrt{B}. \qquad (1)$$

Il est évident que l'on a :

$$AB = a^2b^2 = (ab)^2$$

et, par conséquent :

$$ab = \sqrt{AB}. \qquad (2)$$

En tenant compte des égalités (1), l'égalité (2) peut alors se mettre sous la forme :

$$\boxed{\sqrt{\mathbf{AB}} = \sqrt{\mathbf{A}} \times \sqrt{\mathbf{B}}}$$

- THÉORÈME. — ***La racine carrée d'un produit de deux nombres carrés exacts est égale au produit des racines carrées de deux nombres.***

Exemples.

$$\sqrt{16 \times 9} = \sqrt{16} \times \sqrt{9} = 4 \times 3 = 12$$

$$\sqrt{2\,500} = \sqrt{25} \times \sqrt{100} = 5 \times 10 = 50.$$

Ce résultat peut s'étendre à un nombre quelconque de facteurs carrés exacts :

$$\sqrt{ABC} = \sqrt{AB \times C} = \sqrt{AB} \times \sqrt{C}$$
$$= \sqrt{A} \times \sqrt{B} \times \sqrt{C},$$

et ainsi de suite.

EXEMPLES. $\sqrt{25 \times 0{,}36 \times 81 \times 100} = \sqrt{25} \times \sqrt{0{,}36} \times \sqrt{81} \times \sqrt{100}$
$= 5 \times 0{,}6 \times 9 \times 10$
$= 270.$

$$\sqrt{\frac{4}{9} \times 0{,}16 \times \frac{98}{50}} = \sqrt{\frac{4}{9}} \times \sqrt{0{,}16} \times \sqrt{\frac{98}{50}}$$
$$= \frac{2}{3} \times 0{,}4 \times \frac{7}{5}$$
$$= \frac{56}{150} = \frac{28}{75},$$

en notant, dans le 2e exemple, que : $\frac{98}{50} = \frac{49}{25} = \left(\frac{7}{5}\right)^2$.

14. Racine carrée d'un quotient. — Avec les mêmes notations qu'au nº 13

on a : $$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

d'où : $$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{A}{B}},$$

c'est-à-dire : $$\boxed{\sqrt{\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{A}}}{\sqrt{\mathbf{B}}}}$$

▪ THÉORÈME. — ***La racine carrée du quotient de deux nombres carrés exacts est égale au quotient des racines carrées des deux nombres.***

EXEMPLES. $$\sqrt{\frac{0{,}36}{49}} = \frac{\sqrt{0{,}36}}{\sqrt{49}} = \frac{0{,}6}{7};$$

$$\sqrt{\frac{\frac{4}{9}}{0{,}25}} = \frac{\sqrt{\frac{4}{9}}}{\sqrt{0{,}25}} = \frac{\frac{2}{3}}{0{,}5} = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}.$$

• **Applications.**

7. — *Reconnaître que les nombres suivants sont des carrés parfaits et indiquer leur racine carrée (sans utiliser la table) :*

1° 121 ; 144 ; 441 ; 1 600 ; 4 900.
2° 1 936 ; 2 116 ; 8 281 ; 50 625 ; 6 400.

8. — *A quoi peut-on reconnaître, sans calcul ni emploi de tables de carrés, que les nombres ci-dessous ne sont pas des carrés parfaits :*

87 ; 325 ; 2 400 ; 3 142 ?

9. — *Utiliser la table pour reconnaître, parmi les nombres suivants, ceux qui sont des carrés parfaits et ceux qui ne le sont pas :*

1° 1 296 ; 3 148 ; 5 177 ; 7 056 ; 1 681.
2° 3 144 ; 6 423 ; 1 849 ; 64 009 ; 5 634.

Indiquer les racines carrées des nombres carrés parfaits (¶ Par exemple : $\sqrt{1\,681} = 41$).

10. — 1° *Quel est le plus petit nombre par lequel il faut multiplier* 1 512 *pour obtenir un carré parfait ? Quel est ce carré et quelle est sa racine ?* (¶ On décomposera 1 512 en produit de facteurs premiers :

$$1\,512 = 2^3 \times 3^3 \times 7$$

et on utilisera le théorème du n° 7.)
2° *Mêmes questions avec* 1 962 ; 22 869.

11. — *Calculer les racines carrées exactes des fractions :*

$$\frac{4}{25}; \quad \frac{18}{32}; \quad \frac{144}{169}; \quad \frac{12}{75}; \quad \frac{81}{196}; \quad \frac{180}{245}.$$

12. — *Calculer les racines carrées exactes des nombres décimaux :*

1,44 ; 0,022 5 ; 0,006 4 ; 19,36.

13. — *Trouver la fraction irréductible, inférieure à l'unité, dont le carré a pour termes deux nombres dont la somme est* 13.

14. — *Calculer :*

1° $\sqrt{16 \times 49}$; $\sqrt{0{,}81 \times 25}$; $\sqrt{36 \times 0{,}09}$.
2° $\sqrt{4 \times 81 \times 0{,}64}$; $\sqrt{9 \times 0{,}25 \times 144}$.

15. — *Calculer :*

1° $\sqrt{\frac{16}{49}}$; $\sqrt{\frac{0{,}25}{4}}$; $\sqrt{\frac{144}{25}}$.

2° $\sqrt{\frac{\frac{36}{49}}{0{,}16}}$; $\sqrt{\frac{\frac{7}{9}}{7}}$; $\sqrt{\frac{\frac{32}{2}}{25}}$.

III. RACINE CARRÉE À UNE UNITÉ PRÈS

Travaux pratiques d'initiation.

1° Diviser 324 par 27 :

$$324 = 27 \times 12. \qquad (1)$$

Diviser 334 par 27 :

$$334 = 27 \times 12 + 10 \qquad (2)$$

ou : $$27 \times 12 < 334 < 27 \times 13.$$

Dans chacune des deux opérations le nombre 12 a-t-il la même signification? Comment l'appelle-t-on dans chaque cas?

2° On a : $$729 = (27)^2; \qquad (3)$$

$$751 = (27)^2 + 22; \qquad (4)$$

ou : $$(27)^2 < 751 < (28)^2. \qquad (5)$$

Comment s'appelle le nombre 27 dans l'égalité (3)?
Par analogie avec ce qui a été dit pour la division, comment peut-on appeler le nombre 27 dans l'égalité (4)?

3° On a : $$790 = (27)^2 + 61. \qquad (6)$$

Comparer 790 à $(28)^2$ et $(29)^2$. Le nombre 27 peut-il avoir la même signification que dans l'égalité (4)?

15. Nombres entiers non carrés parfaits. — On constate, en lisant une table de carrés, que la suite des carrés ne se confond pas avec la suite des nombres entiers. Par exemple, le nombre 23 ne figure pas dans la liste des carrés. Nous sommes sûrs qu'il n'existe aucun nombre entier ni aucun nombre décimal dont le carré est 23. On peut montrer, mais *nous l'admettrons*, qu'aucune fraction n'a pour carré 23.

En comparant 23 aux deux nombres carrés parfaits qui l'encadrent on est conduit à écrire :

$$16 < 23 < 25$$

ou : $$4^2 < 23 < 5^2.$$

Nous dirons que 4 est la *racine carrée à une unité près* du nombre 23, ou encore la racine entière de 23.

Plus généralement, étant donné un nombre entier N, il peut se produire deux cas :

1° **Le nombre N est un carré parfait.** On a : $N = n^2$. Le nombre entier n est la racine carrée exacte de N :

$$n = \sqrt{N}.$$

EXEMPLE. $(29)^2 = 841$; $\sqrt{841} = 29$.

2° **Le nombre N n'est pas un carré parfait.** Ce nombre est alors compris entre deux nombres consécutifs de la suite des carrés parfaits. Le premier est le carré n^2 d'un nombre entier n ; le suivant est le carré du nombre $n + 1$. On a donc :

$$n^2 < N < (n + 1)^2.$$

On peut donc rassembler les deux cas en affirmant que, quel que soit le nombre entier N, on peut toujours trouver un nombre entier n tel que l'on ait :

$$\boxed{\mathbf{n^2 \leqslant N < (n + 1)^2}}$$

Le signe = correspond au cas où N est carré parfait.

On remarquera que des cas analogues se présentent lorsqu'on cherche à classer un entier a par rapport aux multiples d'un entier b,

ou bien a est un multiple de b :

$a = bq$; q est alors le *quotient exact* de a par b ;

ou bien a est compris entre deux multiples consécutifs de b :

$bq < a < b(q + 1)$; q est alors le quotient à une unité près de a par b ou encore *quotient entier* de a par b.

On rassemble les deux cas en écrivant :

$$bq \leqslant a < b(q + 1).$$

☆ DÉFINITION. — ***On appelle racine carrée à une unité près[1] ou racine entière d'un nombre entier donné N le plus grand nombre entier* n *dont le carré est inférieur ou égal à ce nombre N.***

EXEMPLES. I. La racine carrée entière de 84 est 9, car :

$$9^2 < 84 < 10^2.$$

II. La racine carrée entière de 9 409 est 97, car :

$$97^2 = 9\,409.$$

III. La racine carrée entière de 4 500 est 67, car :

$$67^2 < 4\,500 < 68^2.$$

1. En fait, il s'agit de la racine carrée à une unité près *par défaut*, mais dans tout ce chapitre, on sous-entendra la locution « par défaut ».

16. Reste de la racine carrée. — Nous venons de voir que la double inégalité :

$$n^2 \leqslant N < (n+1)^2 \qquad (1)$$

définit la racine carrée entière n, du nombre entier N.

Nous pouvons poser :

$$N = n^2 + R. \qquad (2)$$

Le nombre R s'appelle le *reste* de la racine carrée.

Il est nul si : $N = n^2$; N est alors un carré parfait.

☆ DÉFINITION. — ***On appelle* reste de la racine carrée *entière d'un nombre entier l'excès de ce nombre sur le carré de sa racine carrée entière.***

EXEMPLES. I. La racine carrée entière de 84 est 9. Le reste est donc :

$$84 - (9)^2 = 84 - 81 = 3.$$

II. La racine carrée entière de 49 est 7. Le reste est donc :

$$49 - (7)^2 = 49 - 49 = 0.$$

On dit, dans ce cas, que la racine carrée s'obtient *sans reste* ou que le *reste est nul.*

L'inégalité : $N < (n+1)^2,$

s'écrit alors : $n^2 + R < (n+1)^2,$

ou : $R < (n+1)^2 - n^2,$

soit :

$$\boxed{\mathbf{R < 2\,n + 1}} \qquad (3)$$

Inversement, si l'on a :

$$N = n^2 + R, \qquad (2)$$

avec $R < 2\,n + 1, \qquad (3)$

on aura : $n^2 \leqslant N < n^2 + 2\,n + 1,$

ou : $n^2 \leqslant N < (n+1)^2.$

Donc, n est la racine carrée à une unité près de N.

▪ THÉORÈME. — ***Le reste de la racine carrée entière* n *d'un nombre entier N est inférieur à 2* n *+ 1.***

● REMARQUE. — L'inégalité (3) peut se remplacer par :

$$\boxed{\mathbf{R \leqslant 2\,n}} \qquad (4)$$

EXEMPLES. I. $97 = 81 + 16 = 9^2 + 16.$

Comme l'on a : $16 < 2 \times 9 + 1,$ $(16 < 2n)$

La racine carrée à une unité près de 97 est 9, le reste est 16.

II. $48 = 36 + 12 = 6^2 + 12.$

Comme l'on a : $12 = 2 \times 6,$ $(12 = 2n)$

la racine carrée à une unité près de 48 est 6, le reste est 12.

III. $146 = 121 + 25 = 11^2 + 25.$

Comme l'on a : $25 > 2 \times 11,$ $(25 > 2n)$

la racine carrée à une unité près de 146 n'est pas 11.

17. Recherche de la racine carrée à une unité près d'un nombre entier. — Calculer la racine carrée entière, d'un nombre entier donné, c'est *extraire la racine carrée* de ce nombre.

1° **Il faut connaître par cœur les carrés des nombres de 1 à 10.**

EXEMPLE. Racine de 69. Le plus grand carré parfait, inférieur à 69, est 64 qui est le carré de 8. Le reste est 5. La racine à une unité près de 69 est 8.

2° **Cas général.** La table donne, par simple lecture, la racine carrée entière, des nombres inférieurs ou égaux à 10^6.

EXEMPLES. I. Soit à extraire la racine carrée du nombre 8 427. On lit dans la table que 8 427 est compris entre

8 281, carré de 91, et 8 464, carré de 92.

On en conclut que la racine carrée cherchée est 91. Le reste est :

$$R = 8\,427 - 8\,281 = 146.$$

II. Soit à extraire la racine carrée de 34 810 000. Ce nombre est supérieur à 10^6, mais il se termine par un nombre pair de zéros. Le nombre 3 481, obtenu par la suppression des zéros, est dans la table $3\,481 = (59)^2$. Par suite $(5\,900)^2 = 34\,810\,000$. Le nombre proposé est donc un carré parfait. Sa racine est 5 900. Le reste est nul.

18. Extraction, sans table, de la racine carrée. — On opère de la façon indiquée dans la règle qui suit, que nous énoncerons sans la démontrer. Cette règle étant assez longue, nous décomposerons les opérations à effectuer sur un exemple et présenterons différentes remarques ultérieurement.

1° Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier, on écrit ce nombre à la place du dividende d'une division. Les divers chiffres de la racine carrée seront écrits à la place habituelle du diviseur, les opérations auxiliaires à la place du quotient.

On sépare le nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite. La première tranche à gauche peut n'avoir qu'un seul chiffre (ici 5).

N = 5 718 228

2° On extrait la racine carrée entière de la première tranche à gauche. C'est un nombre d'un chiffre que l'on écrit à la place réservée à la racine carrée dont il est premier chiffre (ici 2).

```
5·71·82·28 | 2
           |________
           |
```

On retranche de la première tranche le carré de ce chiffre et la différence trouvée, écrite sous la première tranche, constitue le premier reste partiel (ici 1). On écrit ensuite, à droite de ce reste partiel, la 2e tranche de deux chiffres du nombre donné (ici 71).

```
5·71·82·28 | 2
4          |________
--         |
1 71       |
```

3° On sépare, dans le nombre obtenu (ici 171) le dernier chiffre à droite et on divise le nombre que forment les autres chiffres (ici 17) par le double du nombre écrit à la racine (ici 4). Pour ce faire, on écrit le double de ce nombre à la place habituelle du quotient.

```
5·71·82·28 |  2
4          |________
--         |  4
1 7·1      |
```

Le quotient q de cette division est un nombre qui est supérieur ou égal au nombre formé par le deuxième chiffre de la racine (si le quotient est supérieur ou égal à 10, on essaiera 9).

4° On écrit le quotient q (ici 4) trouvé, à droite du double de la racine et on calcule le produit du nombre (ici 44) ainsi obtenu par le nombre q à essayer. Si ce produit peut être retranché du nombre formé par le reste partiel et la seconde tranche, le nombre q essayé convient (ici 44 × 4 = 176 ne peut pas se retrancher de 171).

```
5·71·82·28 |  2
4          |______________
--         |  44  |  43
17·1       | × 4  | × 3
129        | -----|-----
---        |  176 |  129
 42        |
```

Sinon, on le diminue d'une unité et on recommence l'essai jusqu'à ce que la soustraction soit possible avec un quotient q' (ici 3). On fait alors la sous-

traction et on obtient le deuxième reste partiel (ici 42). On écrit le chiffre q' à la droite du premier chiffre de la racine (si le chiffre qui convient est zéro, on écrit zéro à la droite du premier chiffre de la racine). On a alors les deux premiers chiffres de la racine (ici 23).

5° On traite le deuxième reste partiel (ici 42) comme le premier jusqu'à ce que l'on ait épuisé toutes les tranches du nombre donné. Le dernier reste partiel est le reste de la racine carrée.

5'71'82'28	23	
4	43	469
17'1	× 3	× 9
129	129	4 221
428'2		

On dira donc : on abaisse la tranche suivante 82. Le double du nombre trouvé à la racine 23 est 46. Le quotient de 428 (obtenu en séparant dans 4 282 le dernier chiffre à droite 2) par 46 est 9. Essayons 9, en faisant le produit 469 × 9 = 4 221. La soustraction est possible, le troisième chiffre de la racine est 9 que l'on écrit à la droite de 23.

Le reste partiel est 61. On abaisse la dernière tranche 28. Le double de la racine est 478. Le quotient de 612 (obtenu en séparant dans 6 128 le dernier chiffre à droite 8) par 478 est 1. Essayons 1, en faisant le produit 4 781 × 1 = 4 781. La soustraction est possible. Le dernier chiffre de la racine est 1 que l'on écrit à la droite de 239. Le reste est 1 347.

La racine est 2 391.

5'71'82'28	2 391		
4	43	469	4781
129	× 3	× 9	× 1
1'71	129	4221	4781
428'2			
4221			
612'8			
4781			
1347			

EXEMPLES.

I.

48'74	69
36	129
127'4	× 9
1161	1161
113	

Le quotient de 127 par 12 est 10. On essaie 9. L'essai réussit. La racine est 69. Le reste est 113.

II.

6·98·57	264	
4	46	524
29·8	× 6	× 4
276	276	2096
225·7		
2096		
161		

On abrège l'opération en s'efforçant de faire mentalement les essais. C'est ainsi qu'il est évident que 47 × 7 dépasse 298 et que 46 × 6 est inférieur à 298.

La racine est 264; le reste est 161.

On abrège également en faisant les soustractions sans les poser, et l'on obtient :

6·98·57	264	
29·8	46	524
225·7	× 6	× 4
161	276	2 096

III.

6·25·49·87·82	25 009	
2 25	45	50 009
0 49 87 82	× 5	× 9
4 87 01	225	45 0081

Le deuxième reste partiel est nul. Ceci ne gêne en rien la marche de l'opération. Mais on est conduit à diviser ensuite 4 par 50. On a donc écrit un zéro à la racine et le troisième reste partiel est 49. Il faut ensuite diviser 498 par 500. On a donc encore un nouveau zéro à la racine et le reste partiel est 4 987. On abaisse 82 et on divise 49 878 par 5000, le quotient est 9. La racine est 25 009, le reste est 48 701.

• REMARQUES. 1° Il résulte de la règle d'extraction que le *nombre de chiffres de la racine* est égal au nombre de tranches du nombre donné.

2° Pour ne pas essayer un chiffre que l'on croit trop grand, il peut arriver que l'on essaie un chiffre trop petit. Il faut se prémunir contre une erreur possible en vérifiant que le reste est inférieur ou égal au double de la racine.

3° Quand le reste est nul, le nombre proposé est carré parfait. On a ainsi un autre moyen que la décomposition en produit de facteurs premiers pour calculer la racine carrée d'un carré parfait.

4° On peut aussi présenter l'opération sous une forme moins encombrante :

5·71·82·28	2 391	(1)
1 71	43 × 3 = 129	(2)
42 82	469 × 9 = 4 221	(3)
61 28		
13 47	4 781 × 1 = 4 781	(4)

Une notable simplification des calculs s'obtient en allégeant le calcul du double du nombre trouvé à la racine (3° de la règle). Ainsi au lieu de doubler 23 (1) pour obtenir 46 (3), il suffit d'ajouter 43 et 3 (2).

Au lieu de doubler 239 (1) pour obtenir 478 (4), il suffit d'ajouter 469 et 9 (3).

Cette simplification se révèle d'autant plus efficace que la racine a davantage de chiffres. Sa justification sera établie plus tard, en même temps que celle de la règle d'extraction.

19. Preuve par 9 de la racine carrée. — Reprenons l'exemple III :

$$625\,498\,782 = (25\,009)^2 + 48\,701.$$

Le premier membre de cette égalité est un multiple de 9 augmenté de 6. 25009 est un multiple de 9 augmenté de 7.

$25\,009 \times 25\,009$ est un multiple de 9, augmenté de 4 ($7 \times 7 = 49$, négliger 9); 48 701 est un multiple de 9, augmenté de 2 ($4 + 7 = 11$; $1 + 1 = 2$).

Le deuxième membre est donc un multiple de 9 augmenté de 6 ($4 + 2 = 6$) comme le premier membre.

- RÈGLE. — ***Pour effectuer la preuve par 9, on vérifie l'égalité des restes de la division par 9 du nombre donné et de la somme du carré de la racine et du reste.***

EXEMPLE. $69\,857 = (264)^2 + 161$.

Nombres	69 857	264	$(264)^2$	161
Restes	8	3	0	8

20. Racine carrée entière d'un nombre quelconque décimal ou fractionnaire. — Soit un nombre quelconque N non entier; désignons par E sa partie entière (E peut être égale à 0). On peut écrire :

$$N = E + a; \qquad \text{avec } a < 1.$$

Si e est la racine carrée entière de E on a :

$$e^2 \leqslant E < (e + 1)^2.$$

Les deux nombres E et $(e + 1)^2$ diffèrent d'au moins une unité. Par suite, si l'on ajoute à E le nombre a qui est plus petit que 1, le nombre $E + a$ est encore plus petit que $(e + 1)^2$ et l'on a :

$$e^2 < E + a < (e + 1)^2$$

ou :

$$e^2 < N < (e + 1)^2.$$

On constate que le nombre entier e est le plus grand nombre entier dont le carré est inférieur à N. On est alors conduit aux énoncés suivants :

☆ DÉFINITION. — ***On appelle racine carrée à une unité près, ou racine carrée entière d'un nombre N quelconque (entier, décimal ou fractionnaire) le plus grand nombre entier n dont le carré est inférieur ou égal à N.***

- THÉORÈME. — ***La racine carrée entière d'un nombre non entier est égale à la racine carrée entière de la partie entière de ce nombre.***

Exemples. I. La racine carrée entière de 35,62 est celle de 35, c'est-à-dire 5. Le reste est :

$$35{,}62 - 25 = 10{,}62.$$

II. La racine carrée entière de $\frac{47}{7}$ est celle de sa partie entière qui est 6. La racine carrée entière de 6 est 2. La racine carrée entière de $\frac{47}{7}$ est donc 2. Le reste est :

$$\frac{47}{7} - 4 = \frac{19}{7}.$$

• Remarque. — Dans le cas d'un nombre décimal, on laisse, pratiquement, la partie décimale de côté et on ne s'en sert qu'à la fin pour l'abaisser à la droite du reste. On dispose ainsi l'opération :

2'74,371	16
1 74	$26 \times 6 = 156$
18 371	

La racine est 16. Le reste est 18,371.

• Applications.

16. — *Calculer la racine carrée exacte ou la racine carrée entière de chacun des nombres suivants :*

1°	1 314;	441;	8 281;	10 609.
2°	17 056;	84 100;	16 384;	42 487.
3°	50 630;	55 225;	74 529;	86 500.
4°	99 347;	112 896;	42 436;	25 437.

Contrôler les résultats à l'aide de la table de carrés et faire la preuve par 9 des opérations.

17. — *Calculer la racine entière de chacun des nombres suivants :*

1°	792 103;	845 715;	173 056;	4 001 327.
2°	68 121;	495 616;	366 025;	5 431 939.
3°	1 347 853;	645 283;	737 540;	184 476.

Contrôler les résultats à l'aide de la table de carrés, si cela est possible, et faire la preuve par 9 des opérations.

18. — *La racine carrée entière d'un nombre entier est 27. Quel est le plus grand reste possible ? Quel est le nombre correspondant ?*

19. — *En extrayant la racine carrée entière d'un nombre entier, on a trouvé pour reste 435. Quelle est la plus petite valeur possible de la racine entière ? Quel est, dans ce cas, le nombre donné ?*

20. — *Calculer la racine carrée entière du nombre* 48 824. *De combien peut-on augmenter ce nombre sans changer la racine ?*

21. — *Calculer la racine carrée entière de chacun des nombres suivants :*

1° $\frac{32}{18}$; $\frac{75}{12}$; $\frac{375}{29}$; $\frac{196}{81}$.

2° 954,81; 1 783,41; 41 271,82; 27 851,93.

IV. RACINE CARRÉE À $\frac{1}{10^n}$ PRÈS

Travaux pratiques d'initiation.

1° En divisant successivement 18, 180, 1800 par 7, on obtient :

$$18 = 7 \times 2 + 4, \quad \text{d'où} \quad 7 \times 2 < 18 < 7 \times 3 \qquad (1)$$

$$180 = 7 \times 25 + 5, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} 7 \times 25 < 180 < 7 \times 26 \\ 7 \times \dfrac{25}{10} < 18 < 7 \times \dfrac{26}{10} \\ 7 \times 2{,}5 < 18 < 7 \times 2{,}6 \qquad (2) \end{cases}$$

$$1\,800 = 7 \times 257 + 1 \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} 7 \times 257 < 1\,800 < 7 \times 258 \\ 7 \times \dfrac{257}{100} < 18 < 7 \times \dfrac{258}{100} \\ 7 \times 2{,}57 < 18 < 7 \times 2{,}58 \qquad (3) \end{cases}$$

D'après (1), 2 est le quotient entier (ou a une unité près) de 18 par 7.
D'après (2), 2,5 est le quotient à 0,1 près[1] de 18 par 7.
D'après (3), 2,57 est le quotient à ...près de 18 par 7 (à compléter).

2° En extrayant successivement les racines carrées entières de 18, 1 800, 180 000, on obtient :

$$18 = 4^2 + 2 \quad , \quad \text{d'où} \quad 4^2 < 18 < 5^2 \qquad (4)$$

$$1\,800 = 42^2 + 36 \quad , \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} 41^2 < 1\,800 < 42^2 \\ \left(\dfrac{41}{10}\right)^2 < 18 < \left(\dfrac{42}{10}\right)^2 \\ (4{,}1)^2 < 18 < (4{,}2)^2 \qquad (5) \end{cases}$$

$$180\,000 = (424)^2 + 224, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} (424)^2 < 180\,000 < (425)^2 \\ \left(\dfrac{424}{100}\right)^2 < 18 < \left(\dfrac{425}{100}\right)^2 \\ (4{,}24)^2 < 18 < (4{,}25)^2 \qquad (6) \end{cases}$$

Quels renseignements fournissent (5) et (6) au sujet de 4,1 et de 4,24 en ce qui concerne leurs carrés comparés à 18 ?

21. Racine carrée à $\frac{1}{10}$ près. — La fraction $\frac{5}{3}$ n'est pas le carré d'un nombre entier ni d'une fraction. On peut vérifier la double inégalité :

$$\left(\frac{12}{10}\right)^2 < \frac{5}{3} < \left(\frac{13}{10}\right)^2.$$

1. Rappelons que la locution « par défaut » est sous-entendue.

La fraction $\frac{12}{10}$ est donc la plus grande fraction de dénominateur 10 dont le carré est inférieur à $\frac{5}{3}$.

☆ DÉFINITION. — ***On appelle* racine carrée d'un nombre N à 0,1 près[1] *la plus grande fraction de dénominateur 10 dont le carré est inférieur ou égal au nombre donné N.***

Nous dirons donc que $\frac{12}{10} = 1{,}2$ est la racine carrée à 0,1 près de la fraction $\frac{5}{3}$.

De même 2,9 est la racine carrée à 0,1 près du nombre décimal 8,41 car $(2{,}9)^2 = 8{,}41$. Dans ce cas 2,9 est une racine carrée exacte.

D'une manière générale, $\frac{a}{10}$ est la racine carrée à $\frac{1}{10}$ près du nombre N si l'on a :

$$\boxed{\left(\frac{a}{10}\right)^2 \leqslant N < \left(\frac{a+1}{10}\right)^2} \qquad (1)$$

Il reste à montrer que ce nombre existe et à indiquer le moyen de l'obtenir.

Les inégalités (1) peuvent s'écrire :

$$\frac{a^2}{100} \leqslant N < \frac{(a+1)^2}{100}.$$

Ces nombres sont rangés dans le même ordre de grandeur que leurs produits respectifs par 100. Donc :

$$a^2 \leqslant 100\,N < (a+1)^2.$$

Cette double inégalité montre (nº 15) que a est la racine carrée entière du nombre 100 N.

▪ THÉORÈME. — ***La racine carrée à 0,1 près d'un nombre N est le quotient exact par 10 de la racine carrée entière du nombre 100 N.***

EXEMPLES. I. *Calculer la racine carrée à* 0,1 *près du nombre* N = 3,141 592 6.
On a 100 N = 314,159 26.
La racine carrée entière de 314,16 est la racine carrée de 314. La table montre que 314 est compris entre 289 (carré de 17) et 324 (carré de 18).

1. Rappelons que la locution « par défaut » est sous-entendue.

On peut également faire l'opération. On est alors conduit aux calculs figurés ci-dessous :

3'1 4	17		
2 1'4	29	28	27
2 5	× 9	× 8	× 7
	261	224	189

(On a fait deux essais infructueux.)

La racine carrée cherchée est le quotient exact de 17 par 10, c'est-à-dire 1,7.

Nous observons que nous aurions pu laisser la virgule après le 3 et, au moment où nous abaissions la tranche 14, mettre une virgule à la racine carrée. Nous aurions ainsi le résultat cherché sous forme de nombre décimal.

II. *Racine carrée à* 0,1 *près de* 35.

35,0 0	5,9
10 0'0	109 × 9 = 981
1 9	

La racine est 5,9 :
$(5{,}9)^2 < 35 < 6^2$.

III. *Racine carrée à* 0,1 *près de* $\frac{30}{7}$.

$\frac{30}{7} \times 100 = \frac{3\,000}{7}$, dont la partie entière est 428. La racine carrée entière de 428 est 20. La racine carrée à 0,1 près de $\frac{30}{7}$ est donc $\frac{20}{10}$, soit 2. On peut écrire :

$$2^2 < \frac{30}{7} < (2{,}1)^2.$$

22. Racine carrée à $\frac{1}{100}$ près. — Des considérations analogues à celles que nous avons présentées au n° 21 conduisent à énoncer la définition suivante :

☆ DÉFINITION. — **La racine carrée à 0,01 près d'un nombre N *est la plus grande fraction de dénominateur 100 dont le carré est inférieur ou égal au nombre donné N.***

C'est donc une fraction $\frac{a}{100}$ telle que l'on ait :

$$\left(\frac{a}{100}\right)^2 \leqslant N < \left(\frac{a+1}{100}\right)^2$$

En raisonnant comme au n° 21, on est conduit à la double inégalité :

$$a^2 \leqslant 10^4\,\mathrm{N} < (a+1)^2.$$

▪ THÉORÈME. — ***La racine carrée à 0,01 près d'un nombre donné est le quotient par 100 de la racine carrée à une unité près du nombre 10⁴ N.***

EXEMPLES. I. *Racine carrée à* 0,01 *près de* 3,141 592 6.
On a : $10^4\,\mathrm{N} = 31\,415,926$.

La racine carrée à une unité près de 31 415,926 est la racine carrée de 31 415. La table montre que cette racine est 177, car on a :

$$177^2 = 31\,329 \quad \text{et} \quad 178^2 = 31\,684.$$

On peut également faire l'opération.

3·1 4·1 5	177
2 1·4	27 × 7 = 189
2 5 1·5	347 × 7 = 2 429
8 6	

(1)

3,1415	1,77
2 14	27 × 7 = 189
2515	347 × 7 = 2 429
86	

(2)

La racine cherchée est le quotient de 177 par 100, c'est-à-dire 1,77.

L'opération (1) n'est, en somme, que la suite de la précédente, celle faite au n° 21, (exemple I), et nous observons encore que la virgule aurait pu être laissée en place dans le nombre donné 3,141 592 6. Au moment où l'on abaisse la tranche 14 qui suit, on aurait dû alors mettre la virgule à la racine. On obtient la disposition de l'opération (2).

II. *Racine carrée à* 0,01 *près de* 35.

35,0 000	5,91	
10 0·0	109	1 181
1 90·0	× 9	× 1
71 9	981	1 181

La racine est 5,91

$$(5{,}91)^2 < 35 < (5{,}92)^2$$

Remarquons que le reste est 0,071 9 et non pas 719.

III. *Racine carrée à* 0,01 *près de* $\frac{30}{7}$.

$\frac{30}{7} \times 10^4 = \frac{300\,000}{7}$, dont la partie entière est 42 857.

La racine carrée à une unité près de 42 857 est 207 (voir la table). La racine carrée à 0,01 près de $\frac{30}{7}$ est donc 2,07.

$$(2{,}07)^2 < \frac{30}{7} < (2{,}08)^2.$$

23. Racine carrée à $\frac{1}{1\,000}$ près. — En répétant, encore une fois, les mêmes explications, on est conduit à la définition suivante :

☆ DÉFINITION. — ***On appelle* racine carrée à 0,001 près d'un nombre N *la plus grande fraction de dénominateur 1 000 dont le carré est inférieur ou égal au nombre N.***

C'est donc une fraction de la forme $\frac{a}{1\,000}$ telle que l'on ait :

$$\left(\frac{a}{1\,000}\right)^2 \leqslant \mathrm{N} < \left(\frac{a+1}{1\,000}\right)^2$$

On est alors amené à déterminer a par la double inégalité

$$a^2 \leqslant 10^6\,\mathrm{N} < (a+1)^2.$$

▪ THÉORÈME. — ***La racine carrée à 0,001 près d'un nombre donné est le quotient exact par 1 000 de la racine carrée à une unité près du nombre 10⁶ N.***

Exemple. *Racine carrée à* 0,001 *près de* 3,141 592 6.

Nous calculons le produit de ce nombre par 10^6. On trouve 3 141 592,6 dont on doit extraire la racine carrée à une unité près. C'est celle de 3 141 592.

3·14·15·92	1772
2 1·4	27 × 7 = 189
2 51·5	347 × 7 = 2 429
8 69·2	3 542 × 2 = 7 084
1 60 8	

Le calcul est fait à l'aide de l'opération ci-contre qui est la suite des précédentes. Elle donne pour résultat 1 772. On doit diviser le résultat par 1 000. La racine cherchée est 1,772.

Nous observerons encore que la virgule pourrait être laissée à sa place dans le nombre donné, à condition de mettre une virgule à la racine, au moment où l'on abaisse la première tranche décimale.

▪ RÈGLE GÉNÉRALE. — ***Pour extraire la racine carrée d'un nombre à 0,1, à 0,01, à 0,001 près, on commence par l'écrire sous forme d'un nombre décimal et on le sépare en tranches de deux chiffres, à partir de la virgule vers la gauche et vers la droite. La première tranche de gauche peut n'avoir qu'un chiffre. On opère ensuite comme pour un nombre entier. Lorsqu'on a utilisé la partie entière du nombre donné, on met une virgule à la droite du chiffre que l'on vient de calculer. On arrête l'opération lorsque l'on a obtenu le nombre de chiffres décimaux nécessaires en écrivant au besoin des zéros pour compléter ou remplacer les tranches qui seront en nombre insuffisant.***

EXEMPLES. I. *Racine carrée à 0,001 près de 35.*

35,000000	5,916
100·0	109 × 9 = 981
190·0	1181 × 1 = 1181
7190·0	11 826 × 6 = 70 956
944	

La racine est 5,916.

II. *Racine carrée à 0,001 près de* $\frac{30}{7}$.

Nous écrivons $\frac{30}{7}$ sous forme décimale en prenant 6 chiffres décimaux. Nous obtenons 4,285 714.

L'opération prend la forme ci-dessous :

4,28·57·14	2,070
2·8	407 × 7 = 2 849
285·7	4 140 × 0 = 0
814	

La racine est 2,070 :
$$(2{,}070)^2 < \frac{30}{7} < (2{,}071)^2.$$

• **Applications.**

22. — *Calculer les racines carrées à 0,1 près de chacun des nombres suivants :*

27; 1 782,4; $\frac{22}{7}$; $\frac{9}{10}$; 5; 0,074 2.

23. — *Calculer les racines carrées à 0,01 près de chacun des nombres suivants :*

1° $\frac{3}{5}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{2}{3}$; 1,75.

2° $3 + \frac{5}{6}$; $\frac{22}{7}$; $\frac{355}{113}$; 0,074 2; 5 300.

24. — *Calculer les racines carrées à 0,001 près de chacun des nombres suivants :*

1° 2; 3; 5; 10.

2° $\frac{22}{7}$; $\frac{355}{113}$; $\frac{9}{10}$; 1 782,4.

3° 0,3; 0,03; 0,003; 0,000 3.

25. — *Calculer les racines carrées à 0,001 près de chacun des nombres suivants :*

3,14; 3,141 6; 3,141 592.

D'après cet exercice, dire s'il est nécessaire de connaître 6 chiffres décimaux exacts d'un nombre pour avoir sa racine carrée à 0,001 près.

26. — *Un cercle a 2,5 m de rayon. Quel est, à 1 cm près, le rayon du cercle dont l'aire est double de l'aire du premier cercle ?*

27. — *Quel est le rayon d'un cercle d'aire 1 m² ? Donner le résultat à 1 mm près. Calculer le périmètre du cercle et le comparer au périmètre du carré de même aire.*

28. — *Quel est le rayon R d'une sphère dont l'aire S est 1 m² ? Donner le résultat à 1 mm près* (¶ Formule $S = 4\pi R^2$).

V. CALCULS AVEC DES RADICAUX

24. Généralisation du symbole $\sqrt{A}$. — Lorsque le nombre A est le carré d'un nombre a, l'on a :

$$A = a^2 \iff a = \sqrt{A}.$$

EXEMPLES. $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{6,25} = 2,5$; $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

Mais lorsque le nombre A n'est pas le carré d'un nombre entier, fractionnaire ou décimal, nous savons trouver des nombres x dont le carré diffère de A d'aussi peu que l'on veut.

Nous avons trouvé, par exemple, les égalités suivantes :

$$35 = (5,9)^2 + 0,19;$$
$$35 = (5,91)^2 + 0,0719;$$
$$35 = (5,916)^2 + 0,000\,944.$$

On en conclut que les carrés des nombres 5,9; 5,91; 5,916, qui sont les racines carrées de 35 à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$ près, diffèrent de moins en moins de 35.

L'on conçoit — *et nous l'admettrons* — que si nous avions continué l'opération nous aurions obtenu des nombres dont les carrés auraient été, de plus en plus, voisins de 35. On démontre — et *nous l'admettrons encore* — que l'opération ainsi poursuivie ne s'arrête pas.

Nous conviendrons d'écrire :

$$\sqrt{35} = 5,916...$$

les points de suspension indiquant que les chiffres décimaux suivants n'ont pas été écrits.

EXEMPLE. Si l'on calcule les racines carrées des 2 à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ près, on trouve successivement :

$$1,4; \quad 1,41; \quad 1,414.$$

Nous écrivons : $\sqrt{2} = 1,414...$

Cependant le nombre $\sqrt{2}$ représente le côté d'un carré dont l'aire a pour mesure 2 et ce carré existe comme le montre la *figure n° 1* :

Les dessins I et II représentent deux carrés de 1 cm de côté, partagés chacun en deux parties égales par une diagonale. La figure III représente le carré obtenu à l'aide des moitiés accolées des carrés I et II. Son aire est donc 2 cm² et son côté est exprimé en centimètres par le symbole $\sqrt{2}$.

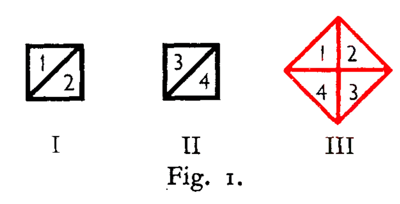


Fig. 1.

Le symbole $\sqrt{2}$ désigne donc un nombre dont le carré est égal à 2 et dont l'expression par une représentation décimale limitée est impossible.

Nous aurons l'occasion de rencontrer couramment les nombres $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ dont les premières décimales sont :

$$\sqrt{3} = 1{,}732...$$
$$\sqrt{5} = 2{,}236...$$

Plus généralement, étant donné un nombre arithmétique A (entier, fractionnaire ou décimal), il n'existe pas nécessairement un nombre (entier, fractionnaire ou décimal) dont le carré est égal à A. Mais, de toute façon, nous énoncerons la définition suivante :

☆ DÉFINITION. — ***On appelle* racine carrée arithmétique *d'un nombre arithmétique A, le nombre arithmétique représenté par le symbole $\sqrt{A}$ dont le carré est égal à A.***

$$(\sqrt{A})^2 = A.$$

Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle radical.

• REMARQUES IMPORTANTES. — I. **Les nombres A et $\sqrt{A}$ sont des nombres arithmétiques.**

II. Dans les calculs où figurent des radicaux, on convient de traiter ces symboles comme des nombres ordinaires et de leur appliquer les règles usuelles des opérations.

25. Nombres irrationnels. — Lorsqu'un nombre est entier, décimal ou fractionnaire on dit qu'il est *rationnel*. Nous venons d'admettre qu'il existe d'autres nombres. On les appelle des nombres *irrationnels*.

EXEMPLES. $\frac{3}{4}$; 0,72; 5 sont des nombres rationnels.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π sont des nombres irrationnels.

26. Produit de deux racines carrées. — Soit deux racines carrées, $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$. Nous représentons leur produit par : $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Calculons le carré de ce produit. Nous appliquons la formule :

$$(xy)^2 = x^2 \times y^2$$

et nous trouvons :

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2.$$

Or : $(\sqrt{a})^2 = a; \qquad (\sqrt{b})^2 = b.$

Par suite : $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = ab.$

Nous en déduisons :

$$\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}} \qquad (1)$$

▪ ***Le produit de deux racines carrées est égal à la racine carrée du produit des deux nombres placés sous les radicaux primitifs.***

EXEMPLES. $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$; $\qquad \sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$;
$\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$; $\qquad \sqrt{a} \times \sqrt{ab^2} = \sqrt{a^2b^2} = ab.$

Les deux derniers exemples sont remarquables; ni 2 ni 18 ne sont des carrés parfaits; $\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}$ n'ont pas de représentation décimale limitée. Cependant leur produit est un nombre *entier*. Cela montre que, si l'on ne prend pas le soin d'observer les nombres qui sont sous le symbole $\sqrt{\ }$, on peut être entraîné à des calculs longs et inutiles.

La relation (1) peut être écrite en sens inverse :

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}} \qquad (2)$$

Il est facile d'étendre la formule (2) à un nombre quelconque de facteurs.

▪ ***La racine carrée d'un produit de facteurs est égale au produit des racines carrées des facteurs.***

EXEMPLES.

$\sqrt{8} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$; $\qquad \sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;
$\sqrt{4\,R^2} = \sqrt{4} \times \sqrt{R^2} = 2\,R$; $\qquad \sqrt{3\,a^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{3} = a\sqrt{3}$;
$\sqrt{288} = \sqrt{144} \times \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$; $\qquad \sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

D'une manière générale :

$$\boxed{\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}} \qquad (3)$$

Cette transformation s'appelle : *sortir un facteur d'un radical.*

C'est possible, et cela simplifie les calculs, chaque fois que l'un des facteurs est un carré exact.

EXEMPLES.

$$\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{27}=\sqrt{4\times 3}+\sqrt{25\times 3}-\sqrt{9\times 3}$$
$$=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}$$
$$=(2+5-3)\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

$$\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{98}=\sqrt{4\times 2}+\sqrt{25\times 2}-\sqrt{49\times 2}$$
$$=2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}$$
$$=0.$$

Inversement, l'égalité (3) peut s'écrire :

$$\boxed{a\sqrt{b}=\sqrt{a^2 b}} \qquad (4)$$

On dit que l'on *fait entrer* a *sous le radical.*

EXEMPLES.

$$3\sqrt{2}=\sqrt{9\times 2}=\sqrt{18};$$
$$a\sqrt{5}=\sqrt{a^2\times 5}=\sqrt{5a^2};$$
$$a^2\sqrt{bc}=\sqrt{a^4 bc}.$$

27. Puissance d'une racine carrée. — Soit la racine carrée $\sqrt{a}$. Nous représentons le produit : $\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{a}$ par $(\sqrt{a})^3$. Nous avons donc :

$$(\sqrt{a})^3=\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{a\times a\times a}$$

ou :

$$(\sqrt{a})^3=\sqrt{a^3}.$$

Plus généralement :

$$\boxed{(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}} \qquad (5)$$

- ***La puissance $n^{ième}$ de la racine carrée d'un nombre a est la racine carrée de la puissance $n^{ième}$ du nombre a.***

EXEMPLES.

$$(\sqrt{5})^3=\sqrt{5^3}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$$
$$(\sqrt{2})^4=\sqrt{2^4}=\sqrt{16}=4.$$

28. Rapport de deux racines carrées. — Soit deux racines carrées, $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$. Nous représentons leur rapport par $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ et nous convenons que ce rapport est soumis aux mêmes règles de calcul que les fractions ordinaires. Le carré de ce rapport est donc :

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}.$$

Comme $(\sqrt{a})^2 = a$ et $(\sqrt{b})^2 = b$, nous obtenons : $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$.

Nous sommes donc conduits à écrire :

$$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.} \qquad (6)$$

▪ ***Le rapport de deux racines carrées est égal à la racine carrée du rapport des nombres placés sous les radicaux primitifs.***

EXEMPLES. $\sqrt{3} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{3} : \sqrt{5} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{0,6}$;

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}; \qquad \sqrt{a} : \sqrt{ab^2} = \sqrt{\frac{a}{ab^2}} = \sqrt{\frac{1}{b^2}} = \frac{1}{b};$$

$$\frac{\sqrt{4\,a^2b}}{\sqrt{b^3}} = \sqrt{\frac{4\,a^2b}{b^3}} = \sqrt{\frac{4\,a^2}{b^2}} = \frac{2\,a}{b}.$$

La relation (6) peut être appliquée en sens inverse. On peut écrire :

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}} \qquad (7)$$

▪ ***La racine carrée d'un rapport est égale au rapport des racines carrées de ses termes.***

EXEMPLES. $\sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$; $\sqrt{\frac{7}{36}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{7}}{6}$.

● REMARQUE. *Pratiquement*, on a intérêt à donner à une fraction placée sous un radical un dénominateur qui soit un carré parfait.

29. Suppression des radicaux dans les dénominateurs. — La division étant une opération plus pénible que la multiplication, surtout quand le dénominateur est compliqué; il y a avantage à simplifier les dénominateurs dans les calculs numériques et à les rendre entiers, si possible.

C'est ainsi que, pour calculer $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ lorsque b n'est pas un carré parfait, il vaut mieux écrire :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

Exemples. I. Pour calculer $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, on écrira :

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Le calcul de $\frac{\sqrt{6}}{2}$ est plus rapide que celui de $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

II. Pour calculer $\frac{1}{\sqrt{2}}$ on écrira :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De même : $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$.

L'application de l'identité :

$$(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2$$

permet d'obtenir un résultat analogue quand le dénominateur est une somme ou une différence de deux nombres dont l'un au moins est une racine carrée.

Exemples. I. *Soit à calculer* $A = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$.

Multiplions les deux termes du rapport par $\sqrt{5} + 2$.

Nous avons ainsi :

$$A = \frac{1 \times (\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4}$$

$$A = \sqrt{5} + 2.$$

II. *Soit à calculer :* $B = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$.

Nous pouvons écrire :

$$B = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1};$$

en divisant les deux termes du rapport par $\sqrt{3}$. Multiplions par $\sqrt{3} - 1$ les deux termes du rapport simplifié, nous obtenons :

$$B = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}.$$

On calcule $(\sqrt{3} - 1)^2$ en appliquant l'identité :

$$(x - y)^2 \equiv x^2 - 2\,xy + y^2$$

dans laquelle on remplace x par $\sqrt{3}$ et y par 1.

On trouve : $(\sqrt{3} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$.

Finalement : $B = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$.

Les nombres $a - \sqrt{b}$ et $a + \sqrt{b}$ dans lesquels b n'est pas un carré exact sont dits des *nombres conjugués;* chacun d'eux est le conjugué de l'autre.

30. Racine carrée arithmétique de x^2 où x est un nombre relatif. — Les nombres qui sont intervenus dans les calculs précédents sont des nombres *arithmétiques* (positifs ou nuls).

L'écriture :

$$a = \sqrt{A}$$

suppose que A est un nombre positif ou nul et le *symbole* $\sqrt{A}$ *désigne un nombre* a *positif ou nul.*

L'égalité : $a = \sqrt{A}$ signifie que l'on a : $a^2 = A$ et, par suite, l'on peut écrire :

$$a = \sqrt{a^2}; \qquad (1)$$

mais cette égalité n'est vraie que si a est un nombre arithmétique. Par suite, si x est un nombre *relatif,* nous ne pouvons pas écrire une relation analogue à l'égalité (1), car $\sqrt{x^2}$ est un nombre arithmétique tandis que x peut être négatif.

Il faudra distinguer plusieurs cas et écrire :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \sqrt{x^2} = & x & \text{si} & x \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2} = & -x & \text{si} & x \leqslant 0 \end{array}} \qquad (2)$$

On n'écrira pas $\sqrt{x^2} = \pm x$, car $\sqrt{x^2}$ n'a pas deux valeurs mais une seule qui est positive (ou nulle si $x = 0$).

EXEMPLES. I. $\sqrt{4^2} = +4$; $\sqrt{(-3)^2} = +3$.

II. Nous avons écrit, lorsque a et b sont des nombres arithmétiques :

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}.$$

Mais, si *a est un nombre relatif*, on devra écrire :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \sqrt{a^2b} = & a\sqrt{b} & \text{si} & a \geqslant 0 \\ \sqrt{a^2b} = & -a\sqrt{b} & \text{si} & a < 0 \end{array}} \qquad (3)$$

APPLICATIONS. 1° Il n'y a pas égalité entre les nombres :

$$(1-\sqrt{2}) \times \sqrt{8} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1-\sqrt{2})^2 \times 8},$$

car le premier est négatif et le deuxième est positif. On a :

$$(1-\sqrt{2}) \times \sqrt{8} = -\sqrt{(1-\sqrt{2})^2 \times 8}.$$

2° Puisque l'on a : $(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$
on écrira :

$$\sqrt{1-2x+x^2} = 1 - x \quad \text{si} \quad 1 - x \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \leqslant 1$$

et $$\sqrt{1-2x+x^2} = x - 1 \quad \text{si} \quad 1 - x \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 1.$$

• REMARQUE. Si l'on préfère utiliser le symbole " valeur absolue ", on peut écrire :

$$\sqrt{x^2} = |x|$$
$$\sqrt{1-2x+x^2} = |1-x|.$$

Mais, comme en fin de compte, il faudra souvent expliciter les calculs, on ne gagne pas grand-chose à employer cette forme condensée et il est conseillé de détailler les opérations en utilisant les relations (2) et (3).

• **Applications.**

Mettre sous une forme plus simple, ne faisant intervenir que les radicaux $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ *ou* $\sqrt{6}$, *chacun des nombres suivants :*

29. — $\sqrt{50}$; $\sqrt{72}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{48}$.
(¶ $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$).

30. — $\sqrt{80}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{20}$.

31. — $\sqrt{150}$; $\sqrt{162}$; $\sqrt{192}$; $\sqrt{200}$.

32. — $\sqrt{\frac{2}{9}}$; $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}$; $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}}$.

Dans chacune des expressions suivantes, simplifier chaque radical, puis effectuer la somme algébrique :

33. $3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180}$ (B. E. P. C.).

34. $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27}$; $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150}$.

35. $9\sqrt{7} - 2\sqrt{28} - \frac{5}{3}\sqrt{63}$; $\sqrt{200} - \sqrt{50} - \sqrt{18}$.

36. $\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{12}$; $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75}$.

37. $2\sqrt{50} - \sqrt{98} - \sqrt{18}$; $2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} + 2\sqrt{98}$.

38. — *Appliquer l'identité* $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$ *au calcul des nombres suivants :*

1° $(\sqrt{2} + 1)^2$; $(\sqrt{3} + 1)^2$; $(\sqrt{5} + 1)^2$.

2° $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$; $(2\sqrt{3} + 1)^2$; $(2\sqrt{5} + 1)^2$.

39. — *Calculer :*

1° $(\sqrt{2} - 1)^2$; $(\sqrt{3} - 1)^2$; $(\sqrt{5} - 1)^2$.

2° $(\sqrt{2} - 3)^2$; $(2\sqrt{3} - 1)^2$; $(2\sqrt{5} - 1)^2$.

40. — *Calculer :*

1° $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$; $(\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2})$; $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$.

2° $(5 - \sqrt{2})(5 + \sqrt{2})$; $(5 + 2\sqrt{5})(5 - 2\sqrt{5})$; $(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6})$.

41. — *Simplifier :*

1° $\sqrt{375} \times \sqrt{48} \times \sqrt{405}$; $\sqrt{275} \times \sqrt{135} \times \sqrt{165}$.

2° $(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$; $(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$.

3° $(\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2)(\sqrt{5} - \sqrt{3} + 2)$; $(7 + 2\sqrt{6})(\sqrt{6} - 1)$.

4° $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}$; $\frac{\sqrt{ab^2c}}{\sqrt{a^2bc}}$ (a, b, c nombres positifs).

5° $\frac{\sqrt{a^2bc}}{\sqrt{ab^2c^2}}$; $\frac{\sqrt{8a^2}}{a^2\sqrt{2}}$ (a, b, c nombres positifs).

Calculer, pour chacun des rapports suivants, un rapport égal dont le dénominateur est un nombre entier :

42. $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

43. $\sqrt{\frac{2}{7}}$; $\frac{a}{\sqrt{a}}$ (a nombre entier positif); $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$.

44. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$; $\frac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}$.

45. $\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+2}$; $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

46. $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; $\frac{10-\sqrt{2}}{5+7\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; $\frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

47. — *Simplifier les expressions :*

1° $\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}$; $\frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

2° $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; $\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

3° $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

48. — *Comparer les nombres suivants en comparant leurs carrés :*

$3\sqrt{5}$ et $2\sqrt{11}$; $4\sqrt{6}$ et $7\sqrt{2}$.

49. — *Calculer les valeurs numériques de chacune des expressions suivantes pour les valeurs indiquées de la variable x :*

1° $x-\sqrt{x^2}$ *pour* $x=2$; $x=-1$; $x=\frac{3}{2}$; $x=1-\sqrt{2}$.

2° $\sqrt{5x^2}+x\sqrt{5}$ *pour* $x=5$; $x=-4$; $x=1-\sqrt{5}$.

3° $\sqrt{\frac{1}{1-x}}\times\sqrt{1-x}$ *pour* $x=0$; $x=-3$; $x=-7$.

4° $x\sqrt{\frac{(-3)^2}{x^2}}$ *pour* $x=+3$; $x=2$; $x=-3$; $x=-1$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Une étoile (★) signifie : Exercices d'application immédiate.
Deux étoiles (★★) signifient : Exercices faciles mais comportant une recherche courte.
Trois étoiles (★★★) signifient : Exercices présentant certaines difficultés.

★

50. — Calculer les racines carrées des nombres suivants (qui sont des carrés exacts) :

1°	828 100;	8 798,44;	93,5089;	0,7744.
2°	938 961;	9 880,36;	91,9681;	0,0081.
3°	231 361;	2 798,41;	30,4704;	0,2304.

51. — Calculer deux nombres entiers positifs connaissant leur différence d et la différence D de leurs carrés dans les cas suivants :

d	1	2	7	8	11
D	35	64	161	256	407

(¶ *Utiliser l'identité* $x^2 - y^2 \equiv (x - y)(x + y)$ *pour calculer la somme des deux nombres.*)

52. — Calculer deux nombres positifs connaissant leur produit p et leur quotient exact q dans les cas suivants :

p	12 288	15 210	18 900	978 123	97 812,3
q	0,75	0,4	$\frac{3}{7}$	3	0,3

$\left(\text{¶ } \textit{Remarquer que} \quad xy \times \frac{x}{y} = x^2\right)$.

53. — 1° Combien y a-t-il de nombres entiers inférieurs à 1 000 qui ne sont pas des carrés parfaits?

2° Combien y a-t-il de nombres entiers compris entre 1 000 et 10 000 qui ne sont pas des carrés parfaits?

54. — Quel est le côté d'un carré dont l'aire est :

1°	34 ha 45 a 69 ca;	3 481 a;	0,260 1 m²;	0,302 5 dm²?
2°	351 649 cm²;	390 625 dm²;	4 096 mm²;	7 140,25 m²?
3°	8 649 ca;	9 409 cm²;	7 140,25 m²;	54,76 dm²?

55. — Un vase cylindrique a 0,75 m de profondeur. Il contient de l'eau qui s'élève aux $\frac{3}{5}$ de sa hauteur. Si l'on ajoutait 15,6 l d'eau, elle s'élèverait aux $\frac{8}{9}$ de sa hauteur.

1° Quelle est la capacité du vase?

2° Calculer son diamètre $\left(\text{prendre } 0{,}318 \text{ pour valeur approchée de } \frac{1}{\pi}\right)$.

56. — Calculer le côté d'un carré sachant que si le côté avait 1 m de plus, l'aire du carré augmenterait de 57 m².

57. — Remplacer les rapports suivants par des rapports égaux dont le dénominateur est entier :

1° $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{14}{\sqrt{7}}$; $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

2° $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$; $\dfrac{4}{3\sqrt{2}}$; $\dfrac{11}{5\sqrt{5}}$; $\dfrac{12}{7\sqrt{2}}$.

3° $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$; $\dfrac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; $\dfrac{7\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}$.

4° $\dfrac{15-\sqrt{6}}{7-2\sqrt{3}}$; $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$; $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; $\dfrac{6+2\sqrt{5}}{9+3\sqrt{5}}$.

58. — Simplifier : $\sqrt{x^2}+x$ (¶ 2 *cas* : $x \geqslant 0$, $x < 0$);
$\sqrt{x^4}+x^2$.

59. — Calculer une valeur approchée, avec deux décimales, du nombre :

$$m = -\frac{8+11\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}.$$ (B. E. P. C.)

★ ★

Problème résolu. — Deux nombres entiers ont pour différence 2.

1° Démontrer que la différence de leurs carrés est un multiple de 4.

2° Trouver les deux nombres lorsque la différence de leurs carrés est 136.

3° Trouver les deux nombres lorsque la différence de leurs carrés est 4 *a*, *a* étant un entier donné.

SOLUTION.

1° *Soit* n *et* n + 2 *les deux nombres, nous avons alors :*

$$(n+2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4(n+1).$$

La différence des carrés des deux nombres est le produit par 4 *du nombre entier* n + 1; *elle est donc divisible par* 4.

2° *Si la différence des carrés est* 136, *nous obtenons :*

$$4(n+1) = 136,$$
$$n+1 = \frac{136}{4} = 34,$$
$$n = 34 - 1 = 33.$$

Les deux nombres sont alors 33 *et* 35.

Nous pouvons vérifier : $35^2 - 33^2 = 1\,225 - 1\,089 = 136$.

3° *Si la différence des carrés est* 4 a, *nous obtenons :*

$$4(n+1) = 4a,$$
$$n+1 = a,$$
$$n = a - 1.$$

Les deux nombres sont alors a − 1 *et* a + 1.

Nous pouvons vérifier :

$$(a+1)^2 - (a-1)^2 = (a^2+2a+1) - (a^2-2a+1) = 4a.$$

60. — 1° On a extrait la racine carrée entière d'un nombre entier et le reste est 137. Montrer que cette racine est supérieure à 68.

2° On sait de plus que le nombre donné a quatre chiffres dont le premier est 4. Trouver ce nombre.

61. — Observer les carrés des nombres entiers équidistants du nombre 500. Que remarque-t-on sur les trois chiffres de droite de leurs carrés? En donner la raison.

62. — 1° Démontrer que le chiffre des unités du carré d'un nombre entier est le même que le chiffre des unités du carré du chiffre des unités du nombre donné.

2° En déduire qu'un carré parfait ne peut pas avoir l'un des chiffres 2, 3, 7 ou 8 comme chiffre des unités.

63. — 1° Observer les colonnes 4 et 6 de la table de carrés et les colonnes 2 et 8. Comment se terminent les carrés?

2° Quelle est la parité du chiffre des dizaines?

Justifier l'observation faite.

64. — Démontrer qu'un carré parfait ne peut se terminer que de l'une des façons suivantes :

1° par un nombre pair de zéros;

2° par l'un des chiffres 1, 4 ou 9, le chiffre des dizaines étant pair;

3° par le chiffre 5, le chiffre des dizaines étant 2;

4° par le chiffre 6, le chiffre des dizaines étant impair.

Application : Reconnaître, sans calcul ni emploi de tables de carrés, qu'aucun des nombres suivants n'est un carré parfait :

3 142;	3 148;	5 177;	6 423;	3 144;	5 634;
8 751;	4 305;	6 710;	8 370;	5 175;	3 825.

(¶ 3 144 *est divisible par* 3 *et ne l'est pas par* 9; 3 825 : *le nombre des centaines* 38 *n'est pas le produit de deux entiers consécutifs.*)

65. — 1° Calculer le produit 293×295.

2° Extraire la racine carrée entière de ce produit. Quel est le reste de l'opération?

3° Trouver les résultats du 2° sans faire l'extraction de la racine carrée. (¶ *Remarquer que* $293 = 294 - 1$, $295 = 294 + 1$.)

66. — 1° Démontrer que la racine carrée entière du produit $n(n+1)$ de deux entiers positifs et consécutifs, n et $n+1$, est égale à n et que le reste est égal à n.

2° Calculer la racine carrée entière du produit 643×644.

3° Trouver l'entier n tel que $n(n+1) = 9\,506$.

4° Trouver un nombre entier tel que son carré le surpasse de 702.

67. — 1° Quelle est la racine carrée entière du produit $n(n+2)$, n étant un entier positif? Quel est le reste?

2° Trouver l'entier n tel que $n(n+2) = 15\,875$.

68. — Trouver un nombre impair x tel que sa racine carrée entière soit 27 et qu'elle divise x.

(¶ *Le nombre cherché* x *est égal à* $27^2 + r$ *avec* r *divisible par 27 et inférieur à 55*).

69. — Un enfant essaie de ranger ses billes en carré; il constate qu'il y a 17 billes de trop. Il tente alors de recommencer en mettant une bille de plus dans chaque rangée, mais pour compléter le nouveau carré il lui manque 4 billes. Combien l'enfant a-t-il de billes? (¶ *Désigner par* x *le nombre de billes par rangée dans la première tentative.*)

70. — On veut former un parallélépipède rectangle avec des dés à jouer. On forme un rectangle dont un côté a un dé de plus que l'autre côté, puis on achève le parallélépipède en superposant des rectangles identiques au premier de façon que la hauteur totale contienne un dé de plus que le grand côté de la base. On a ainsi 6 dés en trop. On essaie de former le parallélépipède en mettant un dé de plus à chaque file, mais il en manque alors 210. Trouver le nombre de dés.

71. — 1° Vérifier que 0,8 et 0,9 sont égaux à leurs racines carrées respectives à 0,1 près. Sont-ils les seuls nombres décimaux à une décimale qui soient égaux à leurs racines carrées à 0,1 près?

2° Trouver les nombres décimaux à deux décimales qui sont égaux à leurs racines carrées à 0,01 près?

72. a et b étant des nombres positifs, simplifier les expressions :

1° $$\frac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}; \qquad \frac{a+4\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2}; \qquad \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

(¶ *Noter que* $a\sqrt{b}=\sqrt{a}\sqrt{b}\times\sqrt{a}$.)

2° $$\sqrt{\frac{a^2b+ab^2}{a+b}}; \qquad \sqrt{\frac{a^2b-ab^2}{a-b}}; \qquad \frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}.$$

3° $$\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$$

et calculer la valeur numérique de l'expression pour $a=\sqrt{3}$; $b=\sqrt{2}$.

73. — 1° Calculer : $(\sqrt{2}+1)^2$ et $(1-\sqrt{2})^2$.

2° Simplifier les expressions :

$$\sqrt{2}\sqrt{3-2\sqrt{2}}\,(\sqrt{2}+1); \qquad \sqrt{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,(\sqrt{2}-1).$$

74. — Comparer les nombres suivants en comparant leurs carrés :

1° $14-6\sqrt{5}$ et $3-\sqrt{5}$; $2+\sqrt{7}$ et $3+\sqrt{2}$

2° $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ et $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$; $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

3° $2+\sqrt{2}$, $1+\sqrt{5}$, $1+2\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

75. — Calculer

$$(2\sqrt{3}+2\sqrt{5})^2+(2\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{3}-\sqrt{5}).$$

(B. E. P. C.)

76. — Calculer, à 0,1 près par défaut, la valeur numérique de l'expression :

$$(x+1)^2(3x-2)(7x-4) \quad \text{pour} \quad x=\sqrt{2}-1.$$

(B. E. P. C.)

* * *

77. — 1° Effectuer les multiplications suivantes :

$$(7 + 2\sqrt{7})(7 - 2\sqrt{7});$$
$$(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2);$$
$$(\sqrt{7} - 2)(7 - 2\sqrt{7}).$$

Simplifier les résultats obtenus.

2° On donne les fractions suivantes :

$$A = \frac{\sqrt{7} - 2}{7 + 2\sqrt{7}}; \qquad B = \frac{1}{\sqrt{7} + 2}; \qquad C = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Rendre entiers leurs dénominateurs en multipliant les deux termes de A par $(7 - 2\sqrt{7})$, les deux termes de B par $(\sqrt{7} - 2)$ et ceux de C par un nombre que l'on indiquera.

3° Effectuer la somme $S = A - B + C$ en remplaçant A, B, C par les fractions à dénominateurs entiers trouvées au 2°.

4° Calculer la racine carrée de 7 à un centième près (faire l'opération sur la copie). En déduire une valeur approchée de S.

(B. E. P. C.)

78. — 1° Ranger par ordre de grandeur croissante les nombres

$$(n + 1)^2; \; n(n + 3); \; (n + 2)^2;$$

où n est un nombre entier positif.

2° En déduire que $n(n + 3)$ ne peut être un carré parfait que dans un seul cas, que l'on indiquera.

3° Quelle est la racine carrée entière du nombre $n(n + 3)$? Quel est le reste?

4° Calculer l'entier n tel que $n(n + 3) = 550$.

5° Calculer l'entier n tel que $n(n + 3) = 7\,138$.

79. — Vérifier les égalités suivantes, en calculant les carrés des deux membres :

1° $$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

2° $$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2.$$

(¶ *Le carré du premier membre se calcule par l'identité :*

$(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$ *avec* $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ *et* $b = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$).

3° $$\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = 6.$$

80. — *Simplifier les expressions :*

1° $$\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}; \qquad \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}.$$

2° $$\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}}; \qquad \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{6}}{5 - 2\sqrt{6}}} + \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{6}}{5 + 2\sqrt{6}}}.$$

CHAPITRE II

RAPPORTS ET PROPORTIONS

I. RAPPORTS

Travaux pratiques d'initiation.

1° Comment s'appelle le nombre dont le produit par 15 est 45?

Comment s'appelle le nombre dont le produit par $\frac{3}{4}$ est $-\frac{9}{11}$?

Quel symbole emploie-t-on pour indiquer que l'on doit calculer ce nombre?

2° Indiquer, en utilisant deux fractions ordinaires, le quotient exact (ou rapport) de 0,75 par 1,125. Calculer ce rapport.

3° Calculer le rapport de $\sqrt{12}$ à $\sqrt{27}$.

4° Quel est le nombre x dont le quotient exact par 15 est égal à $\frac{3}{5}$?

5° Résoudre l'équation : $\frac{x}{17{,}5} = \frac{-42}{150}$.

31. Rapport de deux nombres ordonnés. — Soit deux nombres a et b. Si on convient de considérer que a est le premier nombre et b le deuxième, on dit que les nombres sont *ordonnés*.

☆ DÉFINITIONS — 1° ***Le rapport d'un premier nombre* a *à un deuxième nombre* b *est le quotient exact de* a *par* b.**

2° **a *et* b *sont les termes du rapport.***

On écrit ce quotient sous la forme d'une fraction ayant a pour numérateur et b pour dénominateur.

EXEMPLES. Le rapport de 5 à 8 est $\frac{5}{8} = 0{,}625$.

Le rapport de 0,35 à 8,4 est $\frac{0{,}35}{8{,}4} = \frac{35}{840} = \frac{1}{24}$.

Le rapport de 8,4 à 0,35 est $\frac{8{,}4}{0{,}35} = 24$ (inverse du précédent).

Le rapport de $\frac{3}{4}$ à $-\frac{5}{6}$ est $\frac{3}{4} : \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{9}{10} = -0{,}9$.

Le rapport de $\sqrt{8}$ à $\sqrt{2}$ est $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4 \times 2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

32. Propriétés des rapports. — Les règles de calculs des rapports sont les mêmes que pour les fractions ordinaires (Voir cours de 4e, n° 86).

Nous les résumons dans le tableau ci-dessous :

1° $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, multiplication des deux termes par un même nombre (non nul).

2° $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, division des deux termes par un même nombre (non nul).

3° $\frac{a}{b} = \frac{adf}{bdf}$, $\frac{c}{d} = \frac{cbf}{bdf}$, $\frac{e}{f} = \frac{ebd}{bdf}$, réduction au même dénominateur bdf.

Il existe parfois des dénominateurs plus simples que le produit bdf.

4° $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} + \frac{d}{m} = \frac{a + b - c + d}{m}$, somme algébrique de rapports.

5° $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$, produit de rapports.

6° $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$, quotient de deux rapports.

En particulier $\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{b}$

EXEMPLES. I. $\frac{-0{,}75}{-2{,}5} = \frac{0{,}75}{2{,}5}$, en multipliant les deux termes par -1,

$= \frac{3}{10}$, en multipliant les deux termes par 4.

II. $\frac{-42}{63} = \frac{-2}{3}$, en divisant les deux termes par 21.

III. $\frac{+3}{-4} = -\frac{9}{12}$ et $\frac{-5}{-6} = +\frac{10}{12}$.

IV. $\frac{1}{-2} - \frac{3}{4} + \frac{-2}{-3} = \frac{-6}{12} - \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = -\frac{7}{12}$.

V. $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{-6}\right) = \frac{(-3)(5)}{(4)(-6)} = \frac{-15}{-24} = \frac{5}{8}$.

VI. $\left(-\frac{3}{4}\right) : \left(\frac{+9}{+20}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{20}{9}\right) = -\frac{5}{3}$.

33. Rapport de deux segments. — Soit deux segments AB et CD et supposons qu'ils soient multiples d'un même segment PQ; par exemple (*fig. 2*) :

$$AB = 5\ PQ,$$
$$CD = 3\ PQ.$$

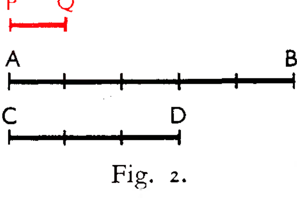


Fig. 2.

On dit alors que les segments AB et CD ont une *commune mesure* (ou une partie *aliquote commune*) PQ, ou encore que AB et CD sont deux *segments commensurables entre eux*.

Dans ce cas, l'un des segments est une fraction de l'autre (cours de 5ᵉ, n° 108) :

$$AB = \frac{5}{3} CD; \qquad CD = \frac{3}{5} AB.$$

Nous conviendrons d'écrire aussi : $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}$ ou $\frac{CD}{AB} = \frac{3}{5}$.

Le nombre $\frac{5}{3}$ est dit le *rapport* du segment AB au segment CD.

☆ DÉFINITIONS. — ***1° Deux segments AB et CD sont commensurables entre eux s'il existe un troisième segment PQ dont ils sont des multiples.***

2° Le rapport de deux segments commensurables ordonnés, est le nombre par lequel il faut multiplier le second pour obtenir le premier.

EXEMPLE. Si l'on a : $MN = 7\,PQ$ et $EF = 2\,PQ$ (*fig. 3*),

on écrira aussi bien :

$$MN = \frac{7}{2} EF \quad \text{ou} \quad EF = \frac{2}{7} MN,$$

et également : $\frac{MN}{EF} = \frac{7}{2}$ ou $\frac{EF}{MN} = \frac{2}{7}$.

$\frac{7}{2}$ est le rapport du segment MN au segment EF.

$\frac{2}{7}$ est le rapport du segment EF au segment MN.

Fig. 3.

• REMARQUE. — Si, dans l'exemple précédent, on prend EF pour unité de longueur, la mesure de MN est $\frac{7}{2}$.

▪ THÉORÈME. — ***Le rapport d'un segment à un autre est la mesure du premier quand on prend le second pour unité.***

34. Évaluation du rapport de deux segments commensurables. — Dans les cas que nous venons d'étudier, nous connaissions une commune mesure des deux segments. Le calcul du rapport est alors immédiat et résulte de la définition.

Voici un cas plus compliqué. Supposons que nous ne connaissions pas de commune mesure à deux segments AB et CD, mais que nous connaissions les rapports de chacun de ces deux segments à un troisième UV. Pour fixer les idées (*fig. 4*) :

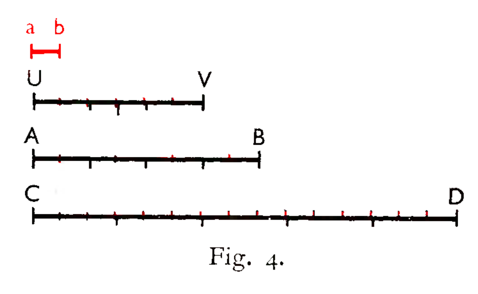


Fig. 4.

$$AB = \frac{4}{3} UV \quad \text{et} \quad CD = \frac{5}{2} UV,$$

ou, en réduisant au même dénominateur :

$$AB = \frac{8}{6} UV \quad \text{et} \quad CD = \frac{15}{6} UV.$$

Nous constatons d'abord que le segment $ab = \frac{1}{6}$ UV est commune mesure à AB et à CD.

▪ THÉORÈME I. — ***Deux segments commensurables à un troisième sont commensurables entre eux.***

Nous constatons ensuite que AB contient 8 fois le segment *ab*
et que CD contient 15 fois le segment *ab*.

Le rapport $\frac{AB}{CD}$ est donc $\frac{8}{15}$.

Or $\frac{8}{15}$ est le rapport de 8 à 15 ou de $\frac{8}{6}$ à $\frac{15}{6}$ c'est-à-dire de $\frac{4}{3}$ à $\frac{5}{2}$.

Si l'on choisit UV pour unité, $\frac{4}{3}$ est la mesure de AB,
$\frac{5}{2}$ est la mesure de CD.

Le rapport de AB à CD est donc le rapport des mesures respectives de AB et de CD avec la même unité.

▪ THÉORÈME II. — ***Le rapport d'un segment à un autre est le rapport de la mesure du premier à la mesure du second, ces mesures étant faites avec la même unité.***

• REMARQUES. I. Pour écrire le rapport de deux segments nous devrions écrire :

$$\frac{\text{segment AB}}{\text{segment CD}};$$

nous venons d'établir l'égalité :

$$\frac{\text{segment AB}}{\text{segment CD}} = \frac{\text{mesure de AB}}{\text{mesure de CD}},$$

les mesures étant faites avec la même unité.

Il en résulte que, lorsque nous écrirons : $\frac{AB}{CD}$, nous pouvons considérer que AB et CD sont les segments considérés ou leurs mesures (avec la même unité).

II. En pratique, on peut mesurer les segments avec les unités usuelles. On trouvera par exemple que AB contient 40 mm et que CD contient 75 mm.

Le rapport $\frac{AB}{CD}$ est : $\frac{40}{75} = \frac{8}{15}$.

35. Segments incommensurables. — Nous rencontrerons, en géométrie, des segments qui n'ont pas de commune mesure. De tels segments sont dits *incommensurables entre eux*.

Voilà ce qui arrivera généralement. Avec une règle divisée en demi-millimètres, on peut évaluer à l'œil le quart de millimètre. Nous trouverons, par exemple, que le segment AB est supérieur à 101 quarts de millimètres et inférieurs à 102 quarts de millimètres. C'est tout ce que nous donne cette mesure. En prenant le quart de millimètre pour unité, nous écrivons :

$$101 < AB < 102.$$

De même, nous trouverons, par exemple :

$$26 < CD < 27.$$

Nous dirons :

que le rapport $\frac{101}{27}$ est une *valeur approchée par défaut* du rapport $\frac{AB}{CD}$,

et que le rapport $\frac{102}{26}$ est *une valeur approchée par excès* du rapport $\frac{AB}{CD}$.

En disant cela, nous admettons que deux segments dont les mesures, quelle que soit l'unité choisie, ne sont pas des nombres entiers, décimaux ou fractionnaires, ont cependant un rapport dont nous ne pouvons donner que des valeurs approchées. Ces valeurs approchées seront d'autant meilleures que l'unité choisie aura été plus petite. Seul, un renseignement d'ordre théorique peut, comme nous le verrons sur des exemples, nous permettre d'affirmer que deux segments sont incommensurables entre eux.

Exemple. Nous avons vu (nº 24) que le rapport de la diagonale AC au côté AB du carré ABCD est égale à $\sqrt{2}$ dont les valeurs approchées décimales sont :

1,4; 1,41; 1,414 par défaut,
1,5; 1,42; 1,415 par excès.

• Remarque. Nous admettrons que les propriétés et les règles de calcul relatives aux rapports de segments incommensurables sont les mêmes que pour les segments commensurables.

36. Rapport de deux vecteurs de même direction. — Rappelons les définitions suivantes :

☆ DÉFINITIONS. — ***1º Quand un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est porté par un axe ou parallèle à un axe, sa mesure algébrique est un nombre relatif dont la valeur absolue est la distance (avec une unité choisie) de l'origine A à l'extrémité B. Ce nombre est positif si le sens de $\overrightarrow{AB}$ est le sens positif de l'axe, il est négatif dans le cas contraire.*** (Cours de 4e, nº 48.)

Cette mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit : $\overline{AB}$
et se lit : mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ou mesure de $\overrightarrow{AB}$.

La longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit AB, en sorte que l'on a :

$$AB = |\overline{AB}|.$$

2° Multiplier un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par un nombre relatif a c'est construire un vecteur $\overrightarrow{CD}$ de même support ou de support parallèle, qui a le sens de $\overrightarrow{AB}$ si a est positif, le sens contraire si a est négatif, et dont la longueur est obtenue en multipliant la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par la valeur absolue du nombre a. (Cours de 4e, nos 74 et 75.)

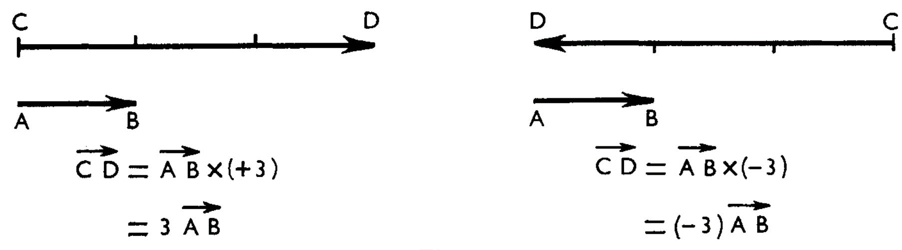


Fig. 5.

On écrit : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \times a$ ou $\overrightarrow{CD} = a\,\overrightarrow{AB}$ (*fig. 5*).
Par analogie avec les calculs faits sur les segments, on est conduit à écrire :

$$a = \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}}$$

et à énoncer la définition suivante :

3° Le rapport de deux vecteurs de même direction est un nombre relatif qui a pour valeur absolue le rapport des longueurs des vecteurs et qui est positif ou négatif suivant que les vecteurs sont de même sens ou de sens contraires.

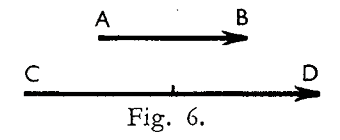


Fig. 6.

Exemple. Sur la *figure 6* le rapport des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ est $+ 2$.

On écrit : $$\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}} = +2, \qquad (1)$$

ce qui équivaut à : $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = +\dfrac{1}{2}$,

ou à : $\overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{AB}$,

ou à : $\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

La *figure 7* permet d'écrire :

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{MN} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{MN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{PQ} \quad \text{ou} \quad \frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{PQ}} = -\frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{MN}} = -\frac{4}{3}. \qquad (2)$$

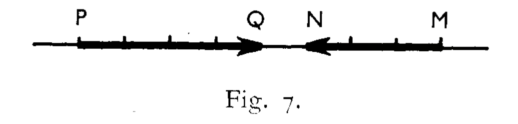


Fig. 7.

Comparons les mesures algébriques des vecteurs. Dans le cas de la *figure 6*, on a : $\overline{CD} = 2\,\overline{AB}$, d'après la règle du produit des nombres relatifs.

Par conséquent : $$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = 2, \qquad (3)$$

d'après la définition du rapport de deux nombres.

On en conclut que l'on a : $\dfrac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ en comparant (1) et (3).

Dans le cas de la *figure 7*, on a :

$\overline{PQ} = \left(-\dfrac{4}{3}\right)\overline{MN}$, d'après la règle du produit de deux nombres relatifs.

Par conséquent : $$\frac{\overline{PQ}}{\overline{MN}} = -\frac{4}{3}, \qquad (4)$$

d'après la définition du rapport de deux nombres.

On en conclut que l'on a : $\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{MN}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{MN}}$ en comparant (2) et (4).

▪ THÉORÈME. — ***Le rapport de deux vecteurs de même support (ou de supports parallèles) est égal au rapport de leurs mesures algébriques calculées avec la même unité.***

• REMARQUE. L'écriture $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ n'a de sens que si les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction.

37. Rapport de deux grandeurs de même espèce. — Les définitions et propriétés qui précèdent s'étendent à d'autres grandeurs que les segments de droite et les vecteurs.

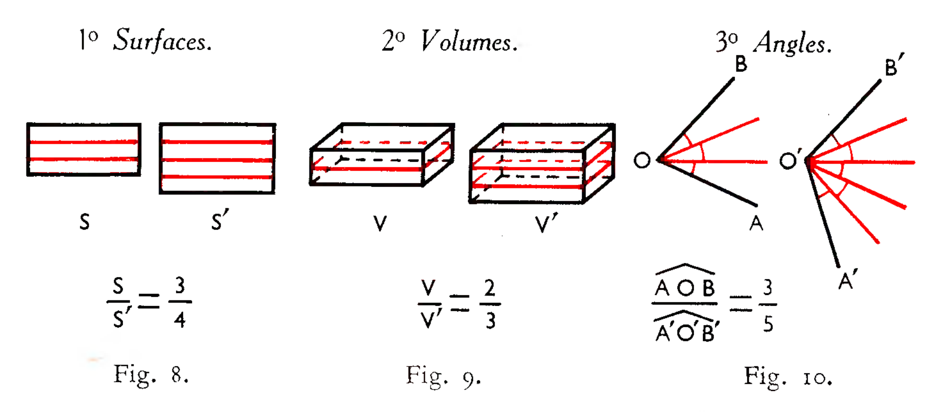


Fig. 8. Fig. 9. Fig. 10.

AUTRES EXEMPLES. I. Le rapport d'une masse A de 250 g à une masse B de 275 g est :

$$\frac{A}{B} = \frac{250}{275} = \frac{10}{11}.$$

On écrit aussi : $A = \frac{10}{11}B$; $B = \frac{11}{10}A$; $\frac{B}{A} = \frac{11}{10}$.

II. Le rapport d'un avoir a de 100 F à un avoir b de 65 F est :

$$\frac{a}{b} = \frac{100}{65} = \frac{20}{13}.$$

On écrit aussi : $a = \frac{20}{13}b$; $b = \frac{13}{20}a$; $\frac{b}{a} = \frac{13}{20}$.

• **Applications.**

On donne les nombres a *et* b*; calculer la valeur du rapport* $\frac{a}{b}$.

81. — 1° $a = \frac{3}{5}$; $b = -\frac{7}{5}$; 2° $a = -\frac{13}{9}$; $b = -\frac{7}{6}$.

82. — 1° $a = 0{,}42$; $b = -\frac{7}{5}$; 2° $a = 2$; $b = \sqrt{2}$.

83. — *Deux segments* AB *et* CD *ont pour mesures respectives : 2,7 dm et 35 cm. Calculer le rapport* $\frac{AB}{CD}$.

84. — *Quelle est la mesure de* MN *si* $\frac{MN}{PQ} = \frac{2}{3}$ *et* PQ = 7 *cm ?*

85. — M *étant le milieu du segment* AB, *calculer le rapport* $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

86. — *Un cône et un cylindre ont le même rayon de base et la même hauteur. Calculer le rapport du volume* V *du cône au volume* V′ *du cylindre.*

87. — *On donne les points* A, B, C *alignés dans cet ordre et tels que :*

$$AB = 45 \text{ mm}; \qquad BC = 72 \text{ mm}.$$

Calculer les rapports : $\frac{AB}{BC}$; $\frac{AB}{AC}$; $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$; $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$; $\frac{\overline{CA}}{\overline{AC}}$; $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

88. — AB, BC, CD *sont trois segments consécutifs d'une même droite et égaux. Calculer les rapports :*

$$\frac{AB}{DB}; \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}; \quad \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AD}}; \quad \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{DA}}.$$

89. — A, B, C *sont les sommets d'un triangle dont les médianes* AA′, BB′, CC′ *se coupent en* G.

1° *Indiquer ceux des rapports suivants qui n'ont pas de sens :*

$$\frac{\overrightarrow{GA'}}{\overrightarrow{GA}}; \quad \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{AA'}}; \quad \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{BC}}; \quad \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{CG}}; \quad \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{CC'}}; \quad \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'G}}; \quad \frac{AB}{A'B'}; \quad \frac{\overline{AG}}{\overline{BG}}.$$

2° *Calculer, lorsque c'est possible, la valeur de chacun des rapports qui ont un sens.*

90. — 1° *Deux vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont tels que* $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = 1$. *Que peut-on en conclure ?*

2° *Même question avec* $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = -1$.

91. — 1° *Tracer un vecteur* $\overrightarrow{AB}$, *puis construire les vecteurs :*

$$\overrightarrow{AC} = -2\,\overrightarrow{AB}; \qquad \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}; \qquad \overrightarrow{AE} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}; \qquad \overrightarrow{AF} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AB}.$$

2° *Calculer les rapports :*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}; \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}; \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}; \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}}.$$

II. PROPORTIONS

Travaux pratiques d'initiation.

1° Simplifier les rapports :

$$\frac{3,75}{4,5} \quad \text{et} \quad \frac{0,385}{0,462} \qquad \left(\text{¶ Réponse : } \frac{5}{6}\right).$$

Calculer les produits :

$$3,75 \times 0,462 \quad \text{et} \quad 4,5 \times 0,385.$$

2° Simplifier les rapports :

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}} \quad \text{et} \quad \frac{2 - \frac{3}{5} + \frac{5}{9}}{\frac{44}{45}}.$$

Calculer les produits :

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{44}{45} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right)\left(2 - \frac{3}{5} + \frac{5}{9}\right).$$

3° Résoudre les équations :

$$\frac{7}{15} = \frac{0,42}{x}; \qquad \frac{2 - \frac{4}{5}}{1 - \frac{7}{4}} = \frac{x}{1,75}.$$

4° Calculer le nombre $x = \sqrt{148 \times 333}$.

Comparer les rapports :

$$\frac{148}{x} \quad \text{et} \quad \frac{x}{333}.$$

38. Proportion.

☆ DÉFINITION. — ***On dit que quatre nombres a, b, c, d, énoncés dans cet ordre, sont en proportion lorsque le rapport du premier au second est égal au rapport du troisième au quatrième.***

On écrit :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}} \qquad (1)$$

L'égalité (1) s'appelle une *proportion*.

EXEMPLES. I — Les nombres : (+ 2), (— 3), (— 8), (+ 12) sont en proportion puisque :

$$\frac{2}{-3} = \frac{2 \times (-4)}{(-3) \times (-4)} = \frac{-8}{+12}.$$

II — Les nombres : $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{36}{35}$ sont en proportion puisque :

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{6}; \qquad \frac{\frac{6}{7}}{\frac{36}{35}} = \frac{6}{7} \times \frac{35}{36} = \frac{5}{6}.$$

☆ DÉFINITIONS. — ***1° Les nombres* a, b, c, d *sont les* termes *de la* proportion.**
***2° Les nombres* a *et* d *sont les* extrêmes.**
***3° Les nombres* b *et* c *sont les* moyens.**

39. Propriété fondamentale. — Soit la proportion :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \qquad (1)$$

Elle peut s'écrire, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}.$$

Par suite, les numérateurs sont égaux et l'on a :

$$\boxed{ad = bc} \qquad (2)$$

▪ THÉORÈME. — ***Si quatre nombres sont en proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.***

40. Réciproque. — Supposons que des nombres a, b, c, d vérifient l'égalité :

$$ad = bc \qquad (2)$$

et que *b et d ne soient pas nuls.*

Divisons les deux membres de l'égalité (2) par le produit bd, nous obtenons :

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}.$$

ou, en simplifiant :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

▪ THÉORÈME. — ***Si quatre nombres* a, b, c, d *sont tels que le produit* ad *soit égal au produit* bc *et si* b *et* d *ne sont pas nuls, ces quatre nombres, énoncés dans cet ordre, sont en proportion.***

Nous retiendrons, sous réserve de la non-nullité de b et de d, l'équivalence logique :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \qquad (3)$$

• REMARQUE. Cette propriété avait été établie dans le manuel de 5e (n° 117) dans le cas particulier où a, b, c, d sont des entiers.

41. Transformations. — On peut écrire l'égalité (2) de plusieurs façons en utilisant la commutativité de la multiplication. Chacune des nouvelles égalités obtenues peut alors conduire à une proportion grâce à la relation (3).

1° Si l'on écrit : $da = bc$, on a :

$$da = bc \iff \frac{d}{b} = \frac{c}{a}. \text{ Les } \textit{extrêmes ont été permutés.} \qquad (4)$$

2° Si l'on écrit : $ad = cb$, on a :

$$ad = cb \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d}. \text{ Les } \textit{moyens ont été permutés.} \qquad (5)$$

3° Si l'on écrit : $da = cb$, on a :

$$da = cb \iff \frac{d}{c} = \frac{b}{a}. \text{ Les } \textit{rapports sont remplacés par leurs inverses.} \qquad (6)$$

▪ THÉORÈME. — ***Une proportion étant donnée, on en obtient une autre, soit :***
***1° en permutant les extrêmes* (4);**
***2° en permutant les moyens* (5);**
***3° en remplaçant chaque rapport par son inverse* (6).**

• REMARQUES. — I. Les égalités (4), (5) et (6) ne peuvent exister simultanément que si aucun des nombres a, b, c, d n'est nul.

II. On peut résumer les transformations en écrivant :

$$ad = bc \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \iff \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

42. Quatrième proportionnelle de trois nombres. — Lorsque quatre nombres ordonnés a, b, c, d, sont en proportion, le dernier, d, est appelé quatrième proportionnelle des nombres a, b, c.

EXEMPLE. 12 est quatrième proportionnelle des nombres 3, 4 et 9 puisque :

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}.$$

43. Problème. — *Étant donné trois nombres* a, b, c, *chercher s'il existe un nombre* x *tel que* a, b, c *et* x *soient en proportion.*

On doit avoir :
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}. \qquad (1)$$

On sait que, si b et x ne sont pas nuls, cette égalité est logiquement équivalente à l'égalité :
$$ax = bc. \qquad (2)$$

Il en résulte que l'on a : $x = \frac{bc}{a}$, si $a \neq 0$.

Comme x ne peut pas être nul, on doit avoir $bc \neq 0$ donc $c \neq 0$ (puisque l'on a déjà supposé $b \neq 0$). Nous résumerons l'étude en énonçant :

- ***Si aucun des nombres* a, b, c *n'est nul, il existe un nombre* x *et un seul qui est tel que les nombres ordonnés* a, b, c, x *soient en proportion.***
***Ce nombre, appelé la quatrième proportionnelle des nombres* a, b, c, *est la solution de l'équation* ax = bc.**

EXEMPLE. La quatrième proportionnelle des nombres 5, 7 et — 12 est la solution de l'équation :
$$5\,x = 7 \times (-12),$$
à savoir :
$$x = -16{,}8.$$

44. Moyenne proportionnelle de deux nombres. — Dans la proportion :
$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} \qquad (\Longleftrightarrow \quad 4 \times 9 = 6 \times 6)$$
le nombre 6 figure deux fois à la place des moyens.

☆ DÉFINITION. — ***Si, dans une proportion* $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$, *le nombre* b *figure deux fois à la place des moyens, ce nombre* b *est appelé* moyenne proportionnelle *des nombres* a *et* d.**

45. Problème. — *Étant donné deux nombres* a *et* d, *chercher s'il existe un nombre* x *tel que l'on ait la proportion :*

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{d}. \qquad (1)$$

Prenons, par exemple, $a = 3$ et $d = 27$. On sait que l'on a l'équivalence logique :

$$\frac{3}{x} = \frac{x}{27} \iff x^2 = 3 \times 27 = 81.$$

On est donc ramené à chercher x pour que l'on ait :

$$x^2 - 81 = 0.$$

Or :

$$x^2 - 81 \equiv (x - 9)(x + 9).$$

On obtient donc l'équation :

$$(x - 9)(x + 9) = 0.$$

On sait (Cours de 4e, n° 143) que les solutions de cette équation sont les solutions des équations :

$$x - 9 = 0 \quad \text{et} \quad x + 9 = 0,$$

à savoir : $x = 9$ et $x = -9$.

Les nombres 3 et 27 ont donc deux moyennes proportionnelles qui sont des nombres opposés.

Dans le cas général, on aura l'équivalence logique :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{d} \iff x^2 = ad \qquad (\text{si } x \neq 0, \quad d \neq 0).$$

Le problème n'est donc possible que si $ad > 0$. L'équation :

$$x^2 - ad = 0$$

s'écrit : $$(x - \sqrt{ad})(x + \sqrt{ad}) = 0$$

et elle admet pour solutions :

$$x' = \sqrt{ad} \quad \text{et} \quad x'' = -\sqrt{ad}.$$

Le calcul exige, en général, l'extraction d'une racine carrée.

Nous résumerons l'étude en énonçant :

- ***Si deux nombres* a *et* d *sont de même signe,* (ad > 0), *ils admettent pour moyennes proportionnelles les solutions de l'équation* $x^2 - ad = 0$. *Ces solutions sont des nombres opposés.***

EXEMPLES. I. Les moyennes proportionnelles de 5 et 20 sont les solutions de l'équation :
$$x^2 - 100 = 0,$$
à savoir : $x' = 10$ et $x'' = -10$.

II. Les moyennes proportionnelles de -5 et de -15 sont les solutions de l'équation :
$$x^2 - 75 = 0,$$
à savoir : $x' = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$, $x'' = -5\sqrt{3}$.

• REMARQUE. Lorsque l'on n'envisage que des nombres arithmétiques, on emploie de préférence l'expression *moyenne géométrique*.

On dira que *la* moyenne géométrique de 3 et 27 est 9
et que *la* moyenne géométrique de 5 et 20 est 10.

46. Autres transformations. — Reprenons la proportion :
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \qquad (1)$$

1° Ajoutons 1 aux deux membres de l'égalité (1) :
$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1,$$
ou :
$$\boxed{\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.} \qquad (2)$$

2° Retranchons 1 aux deux membres de l'égalité (1) :
$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1,$$
ou :
$$\boxed{\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.} \qquad (3)$$

3° Plus généralement, en ajoutant ou en retranchant n aux deux nombres de l'égalité (1), on obtiendrait :
$$\frac{a+nb}{b} = \frac{c+nd}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a-nb}{b} = \frac{c-nd}{d}.$$

4° La proportion (2) peut s'écrire, en permutant les moyens :
$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d} \qquad (\text{si } c + d \neq 0). \qquad (4)$$

De même, la proportion (3) peut s'écrire, en permutant les moyens :
$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d} \qquad (\text{si } c - d \neq 0). \qquad (5)$$

En comparant (4) et (5) on déduit :

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d} \quad \text{ou} \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Nous nous bornerons à ces exemples; on peut trouver beaucoup d'autres transformations qui rendent des services dans les calculs, mais il est inutile de retenir par cœur les résultats; il suffit de comprendre comment on les obtient.

47. Suites de nombres proportionnels.

☆ DÉFINITION. — ***On dit que les nombres de la suite* a, b, c, ... *sont* proportionnels *aux nombres de même rang de la suite* a′, b′, c′, ... *si l'on a :***

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a'}}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b'}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c'}}=\dots \qquad (1)$$

1° Il résulte de cette définition qu'on peut former des nombres proportionnels à des nombres donnés en multipliant ceux-ci par un même nombre. En effet, si on désigne par t la valeur commune des rapports (1) on a :

$$a=ta'; \qquad b=tb'; \qquad c=tc' \dots$$

EXEMPLES. Les nombres : $+1, \quad -2, \quad -5, \quad +12$
sont proportionnels aux nombres : $-3, \quad +6, \quad +15, \quad -36$
obtenus en multipliant les premiers par -3.
Ils sont aussi proportionnels aux nombres :

$$+2{,}5, \quad -5, \quad -12{,}5, \quad +30$$

obtenus en multipliant les nombres de la première ligne par 2,5.

2° Appelons t la valeur commune des rapports égaux de (1). On a :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c}=t;$$

donc :

$$a=a't, \quad b=b't, \quad c=c't;$$

d'où, en ajoutant membre à membre (Cours de 4ᵉ, nº 92) :

$$a+b+c=a't+b't+c't$$
$$=(a'+b'+c')t, \quad \text{en mettant } t \text{ en facteur commun.}$$

Par suite :

$$t=\frac{a+b+c}{a'+b'+c'} \qquad \text{si} \quad a'+b'+c' \neq 0.$$

On obtient ainsi :

$$\boldsymbol{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'}}$$

▪ THÉORÈME. — ***Si l'on a une suite de rapports égaux, on forme un rapport égal aux précédents en faisant le rapport de la somme des numérateurs à la somme des dénominateurs.***

● REMARQUES. I. Il ne faut pas dire que l'on a ainsi additionné les rapports; on a seulement obtenu un nouveau rapport égal aux autres.

II. On aurait également :

$$a - b + c = a't - b't + c't = (a' - b' + c')\,t,$$

d'où : $$t = \frac{a-b+c}{a'-b'+c'} \qquad \text{si} \quad a' - b' + c' \neq 0.$$

Par suite : $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a-b+c}{a'-b'+c'},$$

En particulier si : $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$, on a aussi :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{a+b}{a'+b'} = \frac{a-b}{a'-b'}.$$

III. Si deux suites sont formées de nombres proportionnels, on peut prolonger ces suites, soit en combinant par addition ou soustraction, comme il vient d'être dit au II, soit en multipliant ou divisant tous les nombres d'une suite par un même nombre.

EXEMPLE. Si les nombres a, b, c sont proportionnels à 0,3; 0,75; 8,1, on a :

$$\frac{a}{0{,}3} = \frac{b}{0{,}75} = \frac{c}{8{,}1} = \frac{a+b+c}{0{,}3+0{,}75+8{,}1},$$
$$= \frac{a+b+c}{9{,}15},$$

et aussi : $$\frac{a}{30} = \frac{b}{75} = \frac{c}{810} = \frac{a+b+c}{915},$$

en multipliant 0,3; 0,75; 8,1; 9,15 par 100,

et enfin : $$\frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{54} = \frac{a+b+c}{61},$$

en divisant 30, 75, 810, 915 par 15.

3° On peut remplacer, dans les calculs sur des nombres proportionnels, des fractions ou des nombres décimaux par des nombres entiers.

De :
$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{2}{3}} = \frac{c}{\frac{3}{4}} = \frac{a - b + c}{\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4}},$$

on déduit :

$$\frac{a}{\frac{12}{60}} = \frac{b}{\frac{40}{60}} = \frac{c}{\frac{45}{60}} = \frac{a - b + c}{\frac{17}{60}},$$

ou :
$$\frac{a}{12} = \frac{b}{40} = \frac{c}{45} = \frac{a - b + c}{17}.$$

Applications. — I. *Calculer deux nombres connaissant leur somme $s = 3,7$ et leur rapport $q = 0,85$.*

Si x et y sont les nombres cherchés, on aura :

$$x + y = 3,7, \qquad (1)$$
$$\frac{x}{y} = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}. \qquad (2)$$

La proportion (2) peut s'écrire, en permutant les moyens :

$$\frac{x}{17} = \frac{y}{20},$$

et, en appliquant une propriété des rapports égaux :

$$\frac{x}{17} = \frac{y}{20} = \frac{x + y}{17 + 20},$$

ou, en tenant compte de (1) :

$$\frac{x}{17} = \frac{y}{20} = \frac{3,7}{37} = \frac{1}{10};$$

d'où :
$$\frac{x}{17} = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad 10\,x = 17; \quad x = 1,7;$$

$$\frac{y}{20} = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad 10\,y = 20; \quad y = 2.$$

On vérifie que :
$$1,7 + 2 = 3,7,$$
$$\frac{1,7}{2} = 0,85.$$

Les nombres cherchés sont : 1,7 et 2.

II. *Calculer deux nombres* x *et* y *connaissant leur différence* $x - y = 8{,}7$ *et leur rapport* $\frac{x}{y} = -1{,}9$.

On aura :

$$x - y = 8{,}7 \qquad (1)$$
$$\frac{x}{y} = \frac{-19}{10}. \qquad (2)$$

La proportion (2) peut s'écrire, en permutant les moyens :

$$\frac{x}{-19} = \frac{y}{10},$$

et l'on a aussi :

$$\frac{x}{-19} = \frac{y}{10} = \frac{x-y}{-19-10},$$

ou enfin :

$$\frac{x}{-19} = \frac{y}{10} = \frac{+8{,}7}{-29} = -0{,}3;$$

d'où :

$$\frac{x}{-19} = -0{,}3 \quad \text{et} \quad x = (-19) \times (-0{,}3) = +5{,}7;$$
$$\frac{y}{10} = -0{,}3 \quad \text{et} \quad y = 10 \times (-0{,}3) = -3.$$

On vérifie que : $+5{,}7 - (-3) = +8{,}7$,

$$\frac{+5{,}7}{-3} = -1{,}9.$$

48. Nombres inversement proportionnels.

☆ DÉFINITION. — ***On dit que les nombres de la suite* a, b, c *sont* inversement proportionnels *aux nombres de même rang de la suite* a′, b′, c′ *si les nombres* a, b, c *sont proportionnels aux inverses des nombres* a′, b′, c′.**

On a alors :

$$\frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}}. \qquad (1)$$

Ces relations peuvent s'écrire :

$$aa' = bb' = cc'. \qquad (2)$$

Par suite :

■ ***Si les nombres de deux suites sont inversement proportionnels, le produit de deux nombres correspondants est constant.***

Réciproquement, des relations (2) on peut déduire les relations (1).

EXEMPLE. $3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6 = 36.$

Les nombres : 3, 4, 6.

sont inversement proportionnels aux nombres :

12, 9, 6.

• REMARQUE. Des égalités (2), on déduit en divisant chaque membre par le produit $a'b'c'$ (en supposant $a'b'c' \neq 0$) :

$$\frac{a}{b'c'} = \frac{b}{c'a'} = \frac{c}{a'b'},$$

ce qui montre que les nombres a, b, c sont proportionnels aux produits $b'c'$, $c'a'$ et $a'b'$.

49. Partages. I. *Partages proportionnels.* — Partager un nombre A en parties proportionnelles à des nombres donnés a, b, c, c'est calculer trois nombres x, y, z ayant pour somme A et qui soient proportionnels aux nombres a, b, c.

On est donc conduit aux équations :

$$\begin{cases} x + y + z = A, \\ \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}. \end{cases}$$

EXEMPLE. Partager 2 500 F en parts proportionnelles à 5, 7 et 8. En désignant les parts par x, y, z, évaluées en francs, on a à résoudre les équations :

$$x + y + z = 2\,500, \qquad (1)$$

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{8}. \qquad (2)$$

La propriété, établie au n° 47 donne :

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{8} = \frac{x + y + z}{5 + 7 + 8},$$

ou :

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{8} = \frac{2\,500}{20} = 125;$$

d'où : $x = 5 \times 125 = 625$; $y = 7 \times 125 = 875$; $z = 8 \times 125 = 1\,000$.

Les parts sont respectivement :

625 F; 875 F; 1 000 F.

II. *Partages inversement proportionnels.* — Partager un nombre A en parties inversement proportionnelles à des nombres donnés a, b, c, c'est calculer trois nombres x, y, z ayant pour somme A et qui sont inversement proportionnels aux nombres a, b, c.

On est donc conduit aux relations :

$$\begin{cases} x + y + z = A, & (1) \\ ax = by = cz. & (2) \end{cases}$$

D'après la remarque faite au n° 48, on peut remplacer les égalités (2) par :

$$\frac{x}{bc} = \frac{y}{ac} = \frac{z}{ab} \qquad (3)$$

et on est ramené à un partage proportionnel.

Exemple. Partager 1 480 F en trois parties inversement proportionnelles aux nombres 4, 5 et 6.

En désignant les parts par x, y, z, évaluées en francs, on a à résoudre les équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 1\,480, & (1) \\ \dfrac{x}{30} = \dfrac{y}{24} = \dfrac{z}{20}. & (3) \end{cases}$$

L'équation (3) peut s'écrire plus simplement : $\dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{12} = \dfrac{z}{10}$.

En appliquant la propriété des rapports égaux (n° 47), on obtient :

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{12} = \frac{z}{10} = \frac{x + y + z}{15 + 12 + 10} = \frac{1\,480}{37} = 40;$$

d'où : $x = 15 \times 40 = 600$; $y = 12 \times 40 = 480$; $z = 10 \times 40 = 400$.

Les parts sont respectivement :

600 F; 480 F; 400 F.

● **Applications.**

92. — *Vérifier la proportion* $\dfrac{\frac{5}{7}}{4} = \dfrac{11}{61{,}6}$ *en comparant le produit des extrêmes et le produit des moyens.*

93. — *Écrire quatre proportions résultant de l'égalité des produits :*

$$1{,}2 \times 5 = 15 \times 0{,}4.$$

94. — *Comment faut-il choisir les nombres* a *et* b *pour que l'on ait la proportion :*

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}\,? \qquad (\text{¶ } \textit{Deux cas.})$$

Trouver le nombre inconnu x dans chacune des proportions :

95. — 1° $\frac{-3}{5}=\frac{x}{15}$; 2° $\frac{x}{4}=\frac{9}{16}$; 3° $\frac{3}{x}=\frac{-7}{5}$.

96. — 1° $\frac{5}{7}=\frac{x}{9}$; 2° $\frac{x}{4{,}25}=\frac{7{,}3}{-5}$; 3° $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{x}$.

Calculer la quatrième proportionnelle des nombres :

97. — 1° 1,2; $\frac{5}{4}$; $\frac{3}{11}$; 2° -2; $\frac{4}{7}$; $\frac{1}{3}$.

98. — 1° $\sqrt{2}-1$; $\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$; 2° $\sqrt{3}-1$; $\sqrt{2}-1$; $\sqrt{2}+1$.

Calculer les moyennes proportionnelles des nombres :

99. — 1° 11 et 363; 2° $\frac{1}{2}$ et $-\frac{3}{4}$.

100. — 1° $\sqrt{3}-1$ et $\sqrt{3}+1$; 2° $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

101. — *Calculer la moyenne géométrique des longueurs des segments mesurant :*
1° 17,5 dm et 7 cm. 2° 99 cm et 0,11 m.

102. — *De la proportion* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *déduire les proportions :*

1° $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$; $\frac{a+4c}{a-4c}=\frac{b+4d}{b-4d}$.

2° $\frac{3a+2b}{b}=\frac{3c+2d}{d}$; $\frac{5a-4b}{b}=\frac{5c-4d}{d}$.

103. — *On donne la suite de nombres* 5, -9, 16, 42, -81, 103. *Écrire une suite de nombres proportionnels aux précédents, sachant que le nombre qui correspond à* 16 *est* 12.

104. — *Si* $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=0{,}8$ *quelle est la valeur des rapports :*

$$\frac{a+3b+2c}{a'+3b'+2c'} \quad \textit{et} \quad \frac{a-2b+3c}{a'-2b'+3c'}\,?$$

105. — *Calculer les nombres inconnus* x, y, z, t *dans la suite de rapports égaux :*

$$\frac{3}{5}=\frac{x}{-12}=\frac{y}{15}=\frac{12}{z}=\frac{0{,}6}{t}.$$

106. — *Compléter les listes suivantes de nombres proportionnels :*

0,5			-7	1,6		6	$-\frac{5}{11}$	8,5		
	0,75	9			$\frac{7}{5}$	$-4{,}5$			-1	111

Calculer deux nombres connaissant leur somme s *et leur rapport* q *dans les cas suivants :*

107.

s	4,8	1,5	$\frac{3}{8}$
q	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$

108.

s	$\sqrt{3}+1$	187,6	$2\sqrt{2}$
q	-3	$-\frac{4}{11}$	$3-2\sqrt{2}$

Calculer deux nombres x *et* y *connaissant leur différence* $x - y = d$ *et leur rapport* $\frac{x}{y} = q$ *dans les cas suivants :*

109.

d	1,4	$\frac{7}{5}$	2,5
q	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{3}$

110.

d	$\sqrt{2}$	12,6	-2
q	$\sqrt{2}$	$-\frac{4}{11}$	$3-2\sqrt{2}$

111. — *Calculer les angles d'un triangle sachant qu'ils sont proportionnels aux nombres* 2, 3 *et* 5. *Même question avec* 4, 5 *et* 6.

112. — *Calculer les mesures en centimètres des côtés d'un triangle connaissant le périmètre,* 64 *cm, de ce triangle et sachant que les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres* 5, 7 *et* 4. (*Admission aux E. N.*)

113. — *Trouver deux nombres positifs proportionnels à* $\frac{2}{3}$ *et à* $\frac{7}{6}$ *connaissant leur différence* 120.

114. — *Trouver deux nombres proportionnels à* -5 *et à* 7 *connaissant leur somme* 10,8.

Partager le nombre A *en parties proportionnelles aux nombres* a, b, c *dans les cas suivants :*

115. $A = 4\,780$; $a = 4$; $b = 7$; $c = 9$.

116. $A = 148$; $a = \frac{7}{10}$; $b = \frac{5}{6}$; $c = \frac{14}{15}$.

117. — *En mettant le nombre* 100 *sous forme d'un produit de deux facteurs, écrire deux suites de nombres inversement proportionnels comportant chacune* 5 *nombres.*

118. — *Compléter les listes suivantes de nombres inversement proportionnels :*

8	2,5		$-6{,}4$	9				$\frac{9}{11}$	$-3{,}5$	
0,6		2			$-\frac{3}{4}$	$-0{,}7$	$\frac{3}{5}$			11

119. — *Trouver les nombres entiers les plus petits qui sont inversement proportionnels :*
1° 5, 7 *et* 9; 2° 10, 15 *et* 20.

120. — *Partager une somme de* 98 F *en trois parties inversement proportionnelles aux nombres* 5, 8 *et* 12.

121. — *Partager un segment* AB *mesurant* 102 *mm en deux segments* MA *et* MB *de façon que les mesures respectives de* MA *et de* MB *soient inversement proportionnelles à* $\frac{2}{3}$ *et* $\frac{3}{4}$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

★

122. — Démontrer que l'on a : $\frac{35}{99} = \frac{3\,535}{9\,999} = \frac{353\,535}{999\,999}$.

123. — Des proportions $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$ déduire les proportions suivantes :

$$\frac{aa'}{bb'} = \frac{cc'}{dd'}\,; \qquad \frac{ab'}{ba'} = \frac{cd'}{dc'}.$$

124. — On suppose que les nombres a, b, c ont la même quatrième proportionnelle que les nombres d, e, f. Démontrer que l'on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{cd}{ef}.$$

125. — 1° De la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ déduire :

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{3\,a - 2\,b}{3\,c - 2\,d}.$$

2° Utiliser le résultat du 1° pour trouver deux nombres x et y tels que l'on ait :

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{7} \quad \text{et} \quad 3\,x - 2\,y = 3.$$

(B. E. P. C.)

126. — La mesure a d'un segment est moyenne géométrique des mesures b et c de deux autres segments.

1° Écrire les formules qui permettent de calculer chacun de ces segments lorsqu'on connaît les deux autres.

2° Calculer b lorsque : $a = 12$ cm, $c = 9$ cm.

3° Calculer a lorsque : $b = 4{,}5$ cm, $c = 2$ cm.

127. — 1° Calculer la quatrième proportionnelle des nombres :

$$\sqrt{2}, \quad -3, \text{ et } \sqrt{6}; \qquad \sqrt{2}-1, \quad \sqrt{3}, \text{ et } \sqrt{2}+1.$$

2° Calculer les moyennes proportionnelles des nombres :

$$\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 3\sqrt{3}; \qquad 4+\sqrt{5} \quad \text{et} \quad 4-\sqrt{5}.$$

128. — Deux nombres arithmétiques x et y satisfont à la relation :

$$x \times 238 = y \times 210.$$

Calculer le rapport $\frac{x}{y}$, et lui donner la forme la plus simple.

Calculer ensuite x et y dans les deux cas suivants :

1° leur somme est 416;

2° leur différence est 108.

129. — Le rapport du rayon du Soleil au rayon de la Terre est 109. Le rapport du rayon de la Lune au rayon de la Terre est $\frac{3}{11}$. Quel est le rapport du rayon de la Lune à celui du Soleil?

130. — Les carrés des temps mis par les planètes à parcourir leur orbite sont proportionnels aux cubes des grands axes des orbites.

1° En désignant par T et T′ les temps que mettent à parcourir leurs orbites deux planètes dont les grands axes ont pour mesures respectives a et a', écrire la proportion qui lie les nombres a, a', T et T′.

2° Sachant, que pour la terre, $T = 365$ j et $a = 1$ et que, pour Jupiter, $a' = 5{,}2$, calculer T′ (durée de révolution de Jupiter).

131. — 1° Trois segments AB, CD, EF sont tels que :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{20}{29}; \qquad \frac{EF}{CD} = \frac{105}{87}.$$

Calculer le rapport $\frac{AB}{EF}$.

2° On suppose que les segments du 1° sont sur un axe et que :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = -\frac{20}{29}; \qquad \frac{\overline{EF}}{\overline{CD}} = \frac{105}{87}.$$

Calculer le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$.

132. — On donne un axe $x'Ox$ et, sur cet axe, deux points A et B tels que : $\overline{OA} = -2$, $\overline{OB} = 3$ et un point variable M tel que $\overline{OM} = x$.

1° Calculer $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ ainsi que la valeur y du rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

2° Quelles valeurs prend y pour $x = 2$, $x = -5$? Démontrer que, pour $x = \sqrt{2}$, on a :

$$y = -\frac{8 + 5\sqrt{2}}{7}.$$

(B. E. P. C.)

★ ★

Problème résolu. — 1° On suppose que les nombres relatifs x, y, z sont proportionnels aux nombres 18, -5, 3. Démontrer que :

$$x = -3y + z.$$

2° Calculer x, y et z, sachant que $y + z = 4$.

SOLUTION.

1° *Par hypothèse :*

$$\frac{x}{18} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{3}, \qquad (1)$$

ou :

$$\frac{x}{18} = \frac{-3y}{15} = \frac{z}{3}. \qquad (2)$$

La deuxième proportion (2) *entraîne :*

$$\frac{-3y}{15} = \frac{z}{3} = \frac{-3y + z}{15 + 3} = \frac{-3y + z}{18};$$

d'où :

$$\frac{x}{18} = \frac{-3y + z}{18}.$$

Les dénominateurs des deux rapports sont égaux, l'égalité des rapports entraîne donc :

$$x = -3y + z.$$

2° *La double égalité* (1) *entraîne :*

$$\frac{x}{18} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{3} = \frac{y + z}{-5 + 3}.$$

En tenant compte de l'hypothèse y + z = 4, *nous obtenons :*

$$\frac{x}{18} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{3} = \frac{4}{-2} = -2;$$

d'où :

$$x = -2 \times 18 = -36,$$
$$y = -2 \times (-5) = 10,$$
$$z = -2 \times 3 = -6.$$

133. — Trouver trois nombres x, y, z proportionnels aux nombres 5; 9 et 16, sachant, en outre, que l'on a : $z - y = 4{,}9$.

134. — Trouver trois nombres x, y, z inversement proportionnels à 5; 7 et 9, sachant, en outre, que l'on a : $x - z = 420$.

135. — Calculer le rapport $\frac{a}{b}$ dans chacun des cas suivants :

1° $a = \sqrt{2} - 1$; $b = \sqrt{2} + 1$.
2° $a = |x|$; $b = x$. (¶ *Distinguer deux cas* $x \geqslant 0$, $x < 0$)
3° $a = -x$; $b = \sqrt{x^2}$.
4° $a = |x|$; $b = -\sqrt{x^2}$.

136. — 1° Étant donné un segment AB dont le milieu est O, où se trouve, par rapport à O, un point M de la droite AB lorsque $\frac{MA}{MB} > 1$? lorsque $\frac{MA}{MB} < 1$?

2° La figure étant la même qu'au 1°, où se trouve le point M lorsque $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} < 0$? lorsque $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} > 0$?

3° Existe-t-il un point M pour lequel $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1$? pour lequel $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 1$?

137. — Un segment AB mesure 72 mm; sur ce segment se trouve un point M tel que: $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$. Calculer les longueurs des segments MA et MB. (¶ *Remarquer que* MA + MB = 72 mm.)

138. — Sur l'un des prolongements d'un segment AB un point M est tel que :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{8}.$$

1° Sur lequel des prolongements du segment AB le point M se trouve-t-il?
2° Calculer les longueurs des segments MA et MB, sachant que AB mesure 80 mm.

De la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *déduire les proportions :*

139. $\frac{a}{b} = \frac{a^2 + c^2}{ab + cd}$; $\frac{a}{b} = \frac{ab + cd}{b^2 + d^2}$.

140. $\frac{a^2}{b^2} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2}$.

141. $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$; $\frac{ac}{bd} = \frac{(a + c)^2}{(b + d)^2}$.

142. — On donne les expressions :

$$A = \frac{x + 2y}{x - 3y} \quad \text{et} \quad B = \frac{x^2 + 2xy + 3y^2}{x^2 - xy - y^2}.$$

1° Démontrer que la valeur numérique de chacune de ces expressions est connue si l'on donne la valeur du rapport $\frac{x}{y}$.

2° Calculer les valeurs numériques de A et de B dans chacun des cas suivants :

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}; \qquad x = 5y.$$

★ ★ ★

143. — 1° Calculer deux nombres positifs dont le rapport est égal à $\frac{5}{4}$ et dont la différence des carrés est 324.

2° Calculer deux nombres positifs dont le rapport est $\frac{4}{3}$ et dont la somme des carrés est 250.

144. — Trois sommes sont placées au même taux, l'une pendant 4 mois, la seconde pendant 7 mois et la troisième pendant 13 mois. Elles ont produit des intérêts égaux. Montrer que ces trois sommes sont inversement proportionnelles aux durées des placements. A quels nombres entiers sont-elles proportionnelles? Déterminer ces sommes, si la différence entre la première et la troisième est 472,5 F.

145. — Trois blocs de glace sont tels que le volume du deuxième est les $\frac{8}{5}$ de celui du premier, et les $\frac{7}{27}$ de celui du troisième. La différence des volumes du premier et du troisième est de 1,122 m^3. Calculer le nombre de litres d'eau que donnera la fusion de cette glace, le volume de la glace étant les $\frac{10}{9}$ du volume de l'eau.

146. — Calculer trois nombres x, y et z, sachant que leur somme est 292, que x et y sont proportionnels aux nombres 105 et 90, et que y et z sont proportionnels aux nombres 24 et 21.

147. — Une personne possède un capital qu'elle partage en trois parties proportionnelles aux nombres 2, 5 et 6. Elle place la première à 6 %, la seconde à 4 %, la troisième à 3 %.

1° En appelant x la valeur initiale de la première partie, calculer la somme y dont cette personne pourra disposer au bout d'un an, capital et intérêts réunis.

2° Calculer le capital initial, sachant qu'au bout d'un an la personne pourra retirer 4 725 F, capital et intérêts réunis. (B. E. P. C., section commerciale).

148. — 1° Une somme S doit être partagée entre trois personnes proportionnellement aux nombres $8 - x$ pour la première, 8 pour la seconde, $8 + x$ pour la troisième, x étant un nombre positif inférieur à 8. Calculer la part qui revient à chaque personne.

2° On change d'idée et la somme S est partagée proportionnellement à 8 pour la première personne, $8 + x$ pour la seconde, $8 + 2x$ pour la troisième. Calculer la nouvelle part de chacune des trois personnes. Quelle valeur faudrait-il donner à x pour que la part de la première, obtenue dans le premier partage, soit les $\frac{3}{4}$ de celle qu'elle obtiendrait dans le second? (B. E. P. C.).

149. — Soit x, y, z les mesures en degrés des angles d'un triangle isocèle.

1° On suppose que y et z sont proportionnels aux nombres 2 et 5. Calculer chacun des angles du triangle.

2° y et z étant proportionnels aux nombres m et 5, calculer chacun des angles du triangle en fonction de m.

3° On suppose $x = z$, y et z proportionnels aux nombres m et 5 et $z - y = 30°$. Calculer les mesures des trois angles et le nombre m. (Admission aux E. N.).

CHAPITRE III

CALCUL ALGÉBRIQUE

I. EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

(REVISION)

50. Expression algébrique.

☆ ***On appelle expression* algébrique, *l'indication de calculs à effectuer sur des nombres qui peuvent être, en totalité ou en partie, représentés par des lettres.***

EXEMPLES. $3\,xy,\quad x^2y + 4\,y^2x;\quad \dfrac{3\,xy^2 + x^3}{x^2 - y^2}.$

51. Valeur numérique d'une expression algébrique. — En donnant aux lettres des valeurs numériques particulières et en calculant le résultat des opérations indiquées, on obtient, quand le calcul est possible, un nombre que l'on appelle *la valeur numérique de l'expression algébrique.*

EXEMPLES. I. Pour l'expression :

$$A = \frac{3\,xy^2 + x^3}{x^2 + y^2}$$

le calcul est possible pourvu que x et y ne soient pas simultanément nuls.

II. Pour l'expression :

$$B = \frac{3\,xy^2 + x^3}{x^2 - y^2},$$

le calcul est impossible si les valeurs attribuées à x et à y sont égales ou opposées.

52. Calcul d'une valeur numérique. — On rappelle que :

— tout ce qui est entre parenthèses doit être considéré comme un nombre unique, à prendre en bloc, après l'avoir calculé;

— le signe de la multiplication lie le nombre qui le précède à celui qui le suit;

— les barres de fractions doivent être soigneusement tracées et alignées avec les signes opératoires ou avec les signes d'égalité.

EXEMPLES. I. *Calculer, pour* a $= -3$ *et* b $= +2$, *les valeurs numériques des expressions* :

$$A = (3a + b)(a - b); \qquad B = 3a + b(a - b);$$
$$C = (3a + b)a - b; \qquad D = 3(a + b)(a - b).$$

On trouve :

$$A = (-7)(-5) = 35; \qquad B = -9 + 2(-5) = -19;$$
$$C = (-7)(-3) - 2 = 19; \qquad D = 3(-1)(-5) = 15.$$

Ces expressions, qui ne diffèrent que par des parenthèses, ont des valeurs numériques distinctes.

II. *Calculer, pour* a $= -\frac{4}{3}$ et b $= +0{,}7$, *les valeurs numériques des expressions :*

$$A = a + \frac{5b}{a}; \qquad B = \frac{a + 5b}{a}; \qquad C = (a + 5)\frac{b}{a}.$$

On trouve :

$$A = -\frac{4}{3} + \frac{5(0{,}7)}{-\frac{4}{3}} = -\frac{4}{3} - \frac{10{,}5}{4} = -\frac{95}{24};$$

$$B = \frac{-\frac{4}{3} + 3{,}5}{-\frac{4}{3}} = \frac{-4 + 10{,}5}{-4} = -\frac{6{,}5}{4} = -\frac{13}{8};$$

$$C = \left(-\frac{4}{3} + 5\right)\frac{0{,}7}{-\frac{4}{3}} = -\frac{7{,}7}{4} = -\frac{77}{40}.$$

III. *Calculer les valeurs numériques de :*

$$A = \sqrt{3x + 2} \qquad \text{et} \qquad B = \sqrt{3x} + 2 \qquad \text{pour } x = 3.$$

On trouve :

$$A = \sqrt{3 \times 3 + 2} = \sqrt{9 + 2} = \sqrt{11};$$
$$B = \sqrt{3 \times 3} + 2 = \sqrt{9} + 2 = 3 + 2 = 5.$$

Les deux expressions A et B ne diffèrent que par la longueur du trait horizontal du radical.

- **Applications.**

Calculer les valeurs numériques des expressions suivantes :

150. $a^2 - 3ab + c^2$; $(a - 3b)(a - b)$; $(a - 3b)(a + c)$;

1° *pour* $a = +4$; $b = +2$; $c = +1$;

2° *pour* $a = -4$; $b = +2$; $c = -1$.

151. $\dfrac{3a - 2b}{5c}$; $3a - \dfrac{2b}{5c}$; $\dfrac{3(a - 2b)}{5c}$;

1° *pour* $a = +5$; $b = -3$; $c = +1$.

2° *pour* $a = -4$; $b = -7$; $c = +\dfrac{1}{2}$.

152. $\dfrac{3x + y}{x - y}$; $3x + \dfrac{y}{x - y}$; $\dfrac{3x}{x - y} + y$;

1° *pour* $x = 2$; $y = \sqrt{2}$.

2° *pour* $x = y = 3$.

153. $\dfrac{2x - 1}{2x + 3}$ *pour* $x = \sqrt{3} - 1$.

(¶ Mettre le résultat sous la forme $\dfrac{a + b\sqrt{3}}{c}$, *a*, *b*, c étant des entiers.)

154. $\dfrac{3 - x}{(x - 1)(x - 2)}$ *pour* : 1° $x = 0$; 2° $x = 3$; 3° $x = -1$; 4° $x = 4$.

Pourrait-on la calculer pour $x = 1$? *pour* $x = 2$?

155. $\sqrt{4x^2} + y^2$; $\sqrt{4x^2 + y^2}$.

1° *pour* $x = 1$; $y = \sqrt{2}$.

2° *pour* $x = 2$; $y = -3$.

156. $\sqrt{\dfrac{9x^2}{y^2}}$; $\dfrac{9x^2}{\sqrt{y^2}}$; $\dfrac{\sqrt{9x^2}}{y^2}$;

1° *pour* $x = -3$; $y = -1$

2° *pour* $x = y = 5$;

II. MONÔMES

(REVISION)

53. — Monôme.

☆ ***Un monôme est une expression algébrique dans laquelle les seules opérations indiquées sont des multiplications ou, comme cas particuliers, des élévations à une puissance d'exposant positif.***

EXEMPLES. $3\,xy$; $-\frac{5}{3}x^2y$, sont des monômes

$5\,x - 3$ n'est pas un monôme.

54. Réduction d'un monôme. — Un monôme étant un produit de facteurs possède les propriétés de commutativité et d'associativité, ce qui permet de le *réduire*. Le *coefficient* (facteur numérique) est placé en tête et précède la *partie littérale*.

Les lettres qui composent la partie littérale s'appellent des *variables*.

EXEMPLES.

	Coefficient	Partie littérale
$(-4)\,a^2\,(-2)\,b = 8\,a^2b$	8	a^2b
$x^3\left(\frac{1}{3}\right) \times y \times x = \frac{1}{3}x^4y$	$\frac{1}{3}$	x^4y
$(-3)\,a^2b \times \left(-\frac{1}{3}\right) abc = a^3b^2c$	1	a^3b^2c
$-abc^2 = -\,abc^2$	-1	abc^2

• REMARQUE. On donne parfois à un nombre le nom particulier de *constante* pour indiquer ainsi que sa valeur numérique ne varie pas; par exemple :

$$\left(-\frac{4}{3}\right); \qquad (+2)\ldots$$

Toutefois, comme on l'a expliqué en classe de 4e, on est amené à écrire, par convention $x^0 = 1$. Il en résulte donc que le nombre $\left(-\frac{4}{3}\right)$ peut se mettre sous la forme $\left(-\frac{4}{3}\right)x^0$ et il devient, alors, un cas particulier de monôme en x.

55. Monômes semblables.

☆ ***Deux monômes* semblables *sont deux monômes qui ont la même partie littérale.***

EXEMPLES. $3\,x^4$; $\frac{5}{2}x^4$; x^4 sont des monômes semblables en x.

$2x^2y$; $-x^2y$; $\frac{3}{5}x^2y$ sont des monômes semblables en x et y.

56. Degré d'un monôme.

☆ ***1° On appelle degré d'un monôme relativement à une variable l'exposant de la variable dans le monôme réduit.***

2° On appelle degré d'un monôme relativement à l'ensemble des variables, la somme des exposants des variables.

EXEMPLES. $3\,x^2$ degré 2 par rapport à x

$2\,xy^2$ { degré 1 par rapport à x
— 2 — y
— 3 — l'ensemble des variables x et y

$-\frac{4}{3}$ est un monôme de degré zéro (ou constante).

57. Multiplication des monômes. — On applique les propriétés utilisées pour multiplier plusieurs produits entre eux (*voir Cours de* 4e, n° 106).

EXEMPLES.

$$4\,x^2y \times (-3)\,xy^3 = -12\,x^3y^4.$$
$$(-xy^2)^3 = (-1)^3\,x^3y^6 = -x^3y^6 \text{ (puissance d'un monôme).}$$
$$2\,x^3y \times (-3)\,x \times 5\,xy^2 = -30\,x^5y^3.$$

Le degré du produit est la somme des degrés des facteurs (tant pour chaque variable que pour l'ensemble des variables).

58. Addition algébrique de monômes semblables. — *Voir Cours de* 4e, n° 108.

EXEMPLES. I. $A = -5\,a^2b$; $B = a^2b$; $C = \frac{17}{4}a^2b$;

$$S = A - B + C = \left(-5 - 1 + \frac{17}{4}\right)a^2b = -\frac{7}{4}a^2b.$$

II. $A = 4\,x^2y$; $B = -3\,x^2y$; $C = -x^2y$;

$$S = A + B + C = (4 - 3 - 1)\,x^2y.$$

Le coefficient $4 - 3 - 1$ est égal à zéro. On dit que la somme $A + B + C$ est *identiquement nulle.*

• **Applications.**

157. — *Parmi les expressions suivantes reconnaître celles qui sont des monômes :*

1° $\frac{4x^2y}{3}$; $\frac{4x^2}{3y}$; $x^2y\left(\frac{3}{4}-1\right)y^3$.

2° $5x^{-2}yz$; $(-x^2)y$; $5x\sqrt{y^2}$.

158. — *Réduire chacun des monômes suivants :*

$$-\frac{4}{5}x^2y(-5)y^2; \quad a^2b\left(\frac{5}{7}-\frac{3}{4}\right)b; \quad \frac{5}{4}x^2y\left(-\frac{4}{5}\right)y^2z.$$

159. — *Dans la liste suivante de monômes rassembler, sur une même ligne, ceux qui sont semblables :*

$$4x^2y^3; \quad 3xy; \quad -a^2b; \quad -\frac{1}{4}x^2y^3; \quad 3{,}5\,x^2y; \quad 4ab;$$

$$-6a^2b; \quad -\frac{1}{7}x^2y^3; \quad a^2b; \quad -a^2b; \quad -x^3y^2; \quad \frac{2}{9}ab^2.$$

160. — *Écrire un monôme réduit de coefficient* — 1, *du premier degré par rapport à la variable* a, *du troisième degré par rapport à la variable* b, *du cinquième degré par rapport à l'ensemble des variables* a, b, c.

161. — *Écrire trois monômes semblables de degré* 1 *en* x *et en* y.

162. — *Écrire trois monômes semblables du premier degré en* a *et du second degré en* b. *Calculer leur somme.*

163. — *Effectuer les produits :*

1° $\frac{2}{3}x^2y \times \frac{3}{5}abx^2$; $(-x^2z)\times(-x^2y^2)$. $\frac{5}{3}xy^2 \times \frac{3}{5}x^2y$.

2° $\frac{3}{4}a^2b^3 \times \frac{4}{5}a^3b^2$; $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)\times\left(\frac{4}{7}xz\right)$; $(-2{,}5\,a^2b^3)\times(-4a^3b)$.

164. *Effectuer les élévations aux puissances indiquées :*

1° $\left(-\frac{4}{3}xy^3\right)^2$; $\left(-\frac{1}{2}a^2bc^3\right)^3$.

2° $(-xy^2z)^5$; $\left(\frac{1}{3}ax^2y\right)^4$.

165. — *Montrer que l'expression* $\sqrt{x^2y^4}$ *peut se mettre sous forme d'un monôme.* (¶ Deux cas : $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$.)

166. — *Étant donné les monômes semblables :*

$$A = -3x^2y, \quad B = -2x^2y, \quad C = 5x^2y,$$

calculer :

1° $A + B + C$; $A - B + C$; $A + B - C$.

2° $4A + 5B$; $2A + 3B$; $A - 2B + C$.

III. POLYNOMES

(REVISION)

59. ☆ DÉFINITION. — ***On appelle* polynome *une somme algébrique de monômes à laquelle on peut ajouter ou non une constante.***

Exemples. I. L'expression :

$$5\,a^3b + 7\,ab - 12\,a^2 + 3$$

est un polynome qui a quatre termes.

II. $4\,x + 3\,y$; $5\,x - 1$ sont des binomes (2 termes).

III. $x^2 - 4\,xy + 3\,y^2$; $2\,x^3 - 3\,x + 1$ sont des trinomes (3 termes).

Un polynome, par suite de sa définition, possède les propriétés de commutativité et d'associativité.

60. Réduction des termes semblables d'un polynome. — Soit le polynome :

$$12\,a^2b - 14\,a^3b^2 - 7\,b^3 + 5\,a^3b^2 - 8\,a^2b + 4\,a^3 - 8. \qquad (1)$$

Cette somme algébrique ne change pas de valeur numérique si nous remplaçons les deux termes semblables, $12\,a^2b$, et, $-8\,a^2b$, par leur somme effectuée. Il en est de même pour les deux termes semblables $-14\,a^3b^2$ et $5\,a^3b^2$.

Le polynome s'écrit alors sous la forme plus simple :

$$4\,a^2b - 9\,a^3b^2 - 7\,b^3 + 4\,a^3 - 8. \qquad (2)$$

On dit qu'il a été *réduit*.

61. Polynome ordonné.

☆ ***Un polynome réduit, à une variable, est dit* ordonné *lorsque l'ordre des termes est tel que les degrés des termes successifs vont soit en décroissant soit en croissant.***

Exemples. I. Le polynome P, écrit sous la forme :

$$-14\,x^4 + x^3 + x^2 - 7\,x + 3$$

est ordonné suivant les puissances *décroissantes* de x.

II. Le polynome P, écrit sous la forme :

$$3 - 7\,x + x^2 + x^3 - 14\,x^4.$$

est ordonné suivant les puissances *croissantes* de x.

• REMARQUE. D'après la convention faite sur la puissance d'exposant zéro le terme constant peut être considéré comme un monôme de degré zéro. Il est donc normal de l'écrire le dernier lorsqu'on ordonne le polynome suivant les puissances décroissantes et, au contraire, de l'écrire le premier lorsqu'on ordonne le polynome suivant les puissances croissantes.

62. Degré d'un polynome à une variable.

☆ ***On appelle degré d'un polynome réduit à une variable, le degré du terme de plus haut degré.***

EXEMPLE. Le polynome $x^2 - 3x^3 + 5x^4 - x^5$ est du 5e degré.

• REMARQUES. I. Le degré d'un polynome à une variable ne peut se lire que si le polynome a été préalablement réduit.

Ainsi le polynome :

$$3x^4 + x^2 - x - x^4 + 2x^2 - 2x^4 + 1$$

n'est pas du 4e degré, car il s'écrit, une fois réduit :

$$3x^2 - x + 1.$$

Il est du 2e degré.

II. Un polynome réduit de degré n peut avoir $n + 1$ termes au plus.

Par exemple : $3x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 6x - 2.$

On dit que c'est un polynome *complet* du 4e degré.

Mais : $3x^4 - 6x$

est un polynome *incomplet* du 4e degré.

63. Polynome à plusieurs variables.

1° Le polynome : $2x - 3x^2y + 5y^2 - 3xy + 1$

est un polynome à deux variables x et y.

2° On appelle encore *degré* d'un polynome à plusieurs variables, le degré du ou des monômes de plus haut degré, dans le polynome réduit.

Le polynome en x et y : $2x^3 + xy + 4x^2 - xy^2 + 1$ est du 3e degré (Il contient deux monômes : $2x^3$ et $-xy^2$, de degré 3).

3° Un polynome réduit est dit *homogène* quand tous ses termes sont de même degré.

Le polynome : $4x^2 - 8xy + 16y^2$

est un polynome homogène et du second degré en x et y.

64. Addition algébrique de polynomes. — *Voir Cours de* 4ᵉ, *n*ᵒˢ 115, 116, 117 *et* 118.

EXEMPLES. I. $(7x^2 - 3xy + y^2) + (x^2 - xy - y^2) =$
$7x^2 - 3xy + y^2 + x^2 - xy - y^2 = 8x^2 - 4xy.$

II. Quand il s'agit de polynomes à une variable, il est commode de disposer l'opération comme en arithmétique, les termes semblables se trouvant l'un au-dessous de l'autre dans une même colonne.

$$\begin{array}{rrrrr} A = & 4x^3 & +3x^2 & +x & -1 \\ B = & & 4x^2 & +3x & +3 \\ C = & x^3 & & -x & +5 \\ \hline A+B+C = & 5x^3 & +7x^2 & +3x & +7 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} A = & 4x^3 & & +3x & +1 \\ B = & -3x^3 & +x^2 & -2x & \\ C = & -x^3 & +2x^2 & -x & -1 \\ \hline A+B+C = & & 3x^2 & & \end{array}$$

III. Calculer $A - B - C$ avec :
$A = 8x^2 - 5x + 1$; $B = 4x^2 + x + 3$; $C = 2x^2 - 3x - 2.$

On dispose l'opération de la façon suivante :

$$\begin{array}{rrrr} A = & 8x^2 & -5x & +1 \\ -B = & -4x^2 & -x & -3 \\ -C = & -2x^2 & +3x & +2 \\ \hline A-B-C = & 2x^2 & -3x & \end{array}$$

L'addition des polynomes est une opération *commutative et associative.*

65. Emploi des parenthèses. — 1° *Suppression de parenthèses.* Les règles de suppression des parenthèses sont les mêmes que pour les nombres relatifs.

Toute parenthèse précédée du signe + peut être supprimée.

Toute parenthèse précédée du signe — ne peut être supprimée que si l'on change le signe des termes du polynome qu'elle contient.

EXEMPLES. I. $(x^2 - 5x + 4) + (-6x + 3) = x^2 - 5x + 4 - 6x + 3$
II. $(x^3 - 5x + 4) - (-6x + 3) = x^2 - 5x + 4 + 6x - 3.$

2° *Introduction de parenthèses.* Inversement, il est possible de réunir plusieurs termes d'un polynome et de les mettre dans une parenthèse précédée du signe + en conservant le signe de ces termes.

Si on les met dans une parenthèse précédée du signe — on doit changer le signe de ces termes.

EXEMPLES. Soit le polynome :

$$A = -5x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x + 7.$$

On peut écrire : $A = (-5x^5 - 3x^4 + 4x^3) + (-2x^2 - 5x + 7)$
et aussi : $A = -5x^5 - (3x^4 - 4x^3 + 2x)^2 - (5x - 7).$

66. Multiplication d'un polynome par un monôme. — Rappelons le résultat établi en classe de 4e (nos 122 et 123) :

▪ RÈGLE. — ***Le produit d'un polynome par un monôme est le polynome obtenu en faisant la somme des produits résultant de la multiplication de chacun des termes du polynome par le monôme.***

Cette règle est applicable au produit d'un polynome par une constante.

EXEMPLES. I. $(4x^2 - 5xy + 3) \times 2 = 8x^2 - 10xy + 6$

II. $(4x^2 - 3x - 4) \times 2x^2y = 8x^4y - 6x^3y - 8x^2y.$

• REMARQUE. *Le degré du produit est la somme des degrés du multiplicande et du multiplicateur* (pour une variable ou pour l'ensemble des variables).

EXEMPLE. $\underbrace{(x^2 - 3x + 5)}_{2} \times \underbrace{3x^3}_{+3} = \underbrace{3x^5 - 9x^4 + 15x^3}_{=\ 5}.$

degré pour x : 2 + 3 = 5

67. Mise en facteur commun d'un monôme dans un polynome. — Le produit d'un polynome par un monôme est un polynome. On peut se demander si, réciproquement, un polynome donné ne proviendrait pas du produit d'un polynome par un monôme.

EXEMPLES. I. Le polynome $4x^3y - 6x^2y^2 + 8xy^3$ a le facteur x commun à ses trois termes, ainsi que les facteurs y et 2. On peut donc écrire :

$$4x^3y - 6x^2y^2 + 8xy^3 = 2xy(2x^2 - 3xy + 4y^2).$$

On a mis le monôme $2xy$ en facteur commun.

II. Dans le polynome :

$$A = 15x^5 - 12x^4 + 9x^3$$

on peut mettre en facteur commun :

x^3 : $A = x^3(15x^2 - 12x + 9)$,

ou $3x^3$: $A = 3x^3(5x^2 - 4x + 3)$,

ou $3x$: $A = 3x(5x^4 - 4x^3 + 3x^2)$,

ou x : $A = x(15x^4 - 12x^3 + 9x^2)$,

ou $-4x$: $A = -4x\left(-\frac{15}{4}x^4 + 3x^3 - \frac{9}{4}x^2\right)\cdot$

▪ RÈGLE. — ***Les coefficients du polynome écrit entre parenthèses sont les quotients des coefficients du polynome par le coefficient du monôme mis en facteur commun.***

68. Multiplication de deux polynomes. — On a montré (*classe de* 4e, no 125) que l'on applique la règle suivante :

- RÈGLE. — ***Le produit de deux polynomes est la somme des produits obtenus en multipliant successivement tous les termes du premier par tous les termes du second. On réduit le résultat s'il y a lieu.***

On écrit, en appelant C le produit des polynomes A et B :

$$C = A \times B.$$

La multiplication de deux polynomes est une opération *commutative* :

$$A \times B = B \times A.$$

EXEMPLE.

$$(3x^2 - 5x + 1) \times (2x + 4) = \underbrace{(6x^3 - 10x^2 + 2x)}_{\text{produit par } 2x} + \underbrace{(12x^2 - 20x + 4)}_{\text{produit par } 4}$$

ou en réduisant :

$$6x^3 + 2x^2 - 18x + 4.$$

DISPOSITION PRATIQUE.

I. Calcul du produit : $(x^3 - 2x^2 + x - 2)(x^2 - x + 1)$

$$\begin{array}{rrrrrrl}
x^5 & & x^3 & -2x^2 & +x & -2 & \\
\hline
\end{array}$$

$x^3 - 2x^2 + x - 2$	polynomes réduits et ordonnés sui-
$x^2 - x + 1$	vant les puissances décroissantes
$x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2$	produit du multiplicande par x^2
$- x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x$	— — $-x$
$x^3 - 2x^2 + x - 2$	— — $+1$
$x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$	produit réduit et ordonné.

II. Si les polynomes ne sont pas complets, on laisse des blancs pour avoir une disposition claire :

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & +x & +1 \\
 & & x^2 & -x & +1 \\
\hline
x^4 & +x^3 & +x^2 & & \\
 & -x^3 & -x^2 & -x & \\
 & & x^2 & +x & +1 \\
\hline
x^4 & & +x^2 & & +1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & +x\sqrt{2} & +1 \\
 & & x^2 & -x\sqrt{2} & +1 \\
\hline
x^4 & +x^3\sqrt{2} & +x^2 & & \\
 & -x^3\sqrt{2} & -2x^2 & -x\sqrt{2} & \\
 & & x^2 & +x\sqrt{2} & +1 \\
\hline
x^4 & & & & +1
\end{array}$$

Le terme de plus haut degré du produit est le produit des termes de plus haut degré des deux polynomes donnés. Par suite :

- ***Le degré du produit de deux polynomes est égal à la somme des degrés des deux polynomes.***

69. Produit de plusieurs polynomes.

☆ ***Le produit de plusieurs polynomes est le polynome obtenu en multipliant le premier par le deuxième, le résultat par le troisième et ainsi de suite jusqu'au dernier.***

Un tel produit jouit des propriétés de *commutativité* et d'*associativité* d'un produit de facteurs.

EXEMPLES. I. Calculer le produit : $P = (x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1)(x^5 - x + 1)$.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & x^3 & + x^2 & & -1 & \\
 & x^2 & - x & & +1 & \\
\hline
x^5 + x^4 & & - x^2 & & & \\
 - x^4 & - x^3 & & + x & & \\
 & x^3 & + x^2 & & - 1 & \\
\hline
x^5 & & & + x & - 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrr}
x^5 & & & + x & - 1 & \\
x^5 & & & - x & + 1 & \\
\hline
x^{10} & + x^6 & - x^5 & & & \\
 & - x^6 & & - x^2 & + x & \\
 & & x^5 & & + x & - 1 \\
\hline
x^{10} & & & - x^2 & + 2x & - 1
\end{array}$$

$(x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1) = x^5 + x - 1$

On trouve : $P = x^{10} - x^2 + 2x - 1.$

II. Calcul de $(x^2 - 3x + 1)^2$ (puissance d'un polynome).

Voir la disposition ci-contre :

$(x^2 - 3x + 1)^2 = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1.$

$$\begin{array}{rrrrr}
x^2 & - 3x & + 1 & & \\
x^2 & - 3x & + 1 & & \\
\hline
x^4 & - 3x^3 & + x^2 & & \\
 & - 3x^3 & + 9x^2 & - 3x & \\
 & & x^2 & - 3x & + 1 \\
\hline
x^4 & - 6x^3 & + 11x^2 & - 6x & + 1.
\end{array}$$

70. Vérification de valeurs numériques. — Soit à calculer le produit des polynomes :

$$A = x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \qquad \text{et} \qquad B = -x^2 + 4x + 1,$$

et à vérifier l'égalité des valeurs numériques pour $x = -0{,}1$.

Il est commode de disposer les calculs, comme nous l'avons montré en classe de 4ᵉ :

		$x = -0{,}1$	
A	$x^3 - 3x^2 + 2x - 1$	$-0{,}001 - 0{,}03 - 0{,}2 - 1 =$	$-1{,}231$
B	$-x^2 + 4x + 1$	$-0{,}01 - 0{,}4 + 1 =$	$+0{,}59$
	$-x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2$ $4x^4 - 12x^3 + 8x^2 - 4x$ $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$	$(-1{,}231) \times (0{,}59) =$	$-0{,}726\,29$
P	$-x^5 + 7x^4 - 13x^3 + 6x^2 - 2x - 1$	$+ 0{,}000\,01 + 0{,}000\,7$ $+ 0{,}013 + 0{,}06$ $+ 0{,}2 - 1 =$	$-0{,}726\,29$

• **Applications.**

167. — *Calculer les valeurs numériques de :*

1° $x^2 - 2x - 1$ *pour* $x = 1 + \sqrt{2}$.

2° $x^2 - xy + y^2$ *pour* $x = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ et $y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Réduire les termes semblables dans chacun des polynomes suivants :

168. $5x^2 - 4x + 1 + 3x^2 - 5x - 3 - x^2 + 6x + 4$.

169. $4x^2 + xy - y^2 - xy - y^2 - 2x^2 + 3xy + y^2$.

170. $4x^2y - 5xy + 3xy^2 - x^2y + 3x^3 - 2xy + 7y^2 - 11xy^2$.

Réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de la variable chacun des polynomes suivants et indiquer le degré du polynome réduit :

171. $4x^3 - \dfrac{1}{2}x + 7x^2 - 3 + \dfrac{3}{4}x - 8x^2$.

172. $\dfrac{5}{7}x^2 - 3x^4 + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{11} - \dfrac{1}{14}x^2 + \dfrac{3}{4}x - 8x^3$.

173. $9x - 3x^4 + x^3 - 5x + 7x^2 - 11 + 8x^3 - 4x^2$.

174. — *Étant donné les polynomes :*

$$A = 4x^3 - 3x^2y + 3y^2,$$
$$B = -x^3 + 3xy^2 + 7y,$$
$$C = 5x^2y - 4xy^2 + z,$$

calculer :

1° $A + B + C$; $A - B + C$; $A + B - C$; $-A + B + C$;

2° $3xyA$; $-xy^2B$; $3xyA + (-xy^2)C$.

Calculer les produits suivants :

175. $(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)\,5x^2$; $(x^3 - x^2 - x + 1)(-4x)$.

176. $(x^2 - xy + y^2)(2\,xy^2)$; $(x^2 + xy - y^2)(3\,xy)$.

177. $(x^2 + xy + y^2)\,xy$; $(x^3 + x^2 - 4)(3\,x^2y^2)$.

178. — *Calculer, en réduisant les termes semblables :*

$$x^2 - (x^2 - 3\,x + 1) - [2\,x - 3\,(x^2 + x - 1)];$$
$$x^2 + (x^2 - 3\,x + 1) - [3\,(x^2 + x - 1) - 2\,x)].$$

Calculer les valeurs numériques prises par ces expressions, avant et après la réduction, si l'on fait : 1° $x = 3$, 2° $x = -3$.

(¶ Disposer les résultats sous la forme d'un tableau.)

Supprimer les parenthèses, réduire et ordonner :

179. $(x^2 - 3\,x + 1) - 2\,(2\,x^2 - 4\,x + 3) - 3\,(5 + 2\,x - 4\,x^2)$.

180. $x^2 - xy + y^2 - [x^2 - xy - (2\,x^2 - 3\,xy + y^2)]$.

181. $9\,a^2 - 3\,ab + b^2 - 4\,(a^2 - ab - b^2) - (a^2 - 2\,ab + b^2)$.

Mettre en facteur commun le monôme de plus haut degré possible, tous les coefficients restant entiers, dans :

182. $5\,x^3 - 15\,x^2y + 20\,xy^2$; $12\,x^2y^3 + 18\,xy^4 - 24\,x^4y$.

183. $4\,a^2 - 5\,ab + ac$; $6\,a^4b^3 - 12\,a^3b^4 + 4\,a^3b^5$.

184. $6\,a^3 - 24\,a^2 - 6\,a$; $13\,a^3x^2y^3 - 26\,a^3x^2y^2 + 39\,a^3x^3y^3$.

Calculer, en posant les multiplications :

185. $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b)$.

186. $(x^4 - x^2y^2 + y^4)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$.

187. $(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)(x + a)$.

Calculer et réduire :

188. $(x - 1)(x + 3) + (x - 2)^2$.

189. $2\,(x - 3)(x + 2) + (x - 1)(x + 1)$.

190. $(x + 2)(2\,x + 1) + (x - 2)(2\,x - 1)$.

191. $(2\,x + 5)(x + 2) - (x + 3)(x + 1) + (x + 2)^2$.

192. $(2\,x - 5)(x - 2) - (x + 4)(x + 1) - (x - 3)^2$.

193. $(3\,x + 2)(5\,x - 4)(x - 1)$; $(x^2 + 2)(x^2 - x)(x + 1)$.

IV. IDENTITÉS

Travaux pratiques d'initiation.

1° Enoncer la règle de multiplication d'une somme par un nombre. Compléter :

$$(a - b + c)\,m = \dots.$$

2° Au lieu de séparer les deux membres par le signe $=$ on emploie le signe $\equiv$ qui se lit ....

3° Peut-on écrire : $2 \times 12 \equiv 18 + 6$?

4° Donner un nom différent à chacune des écritures (1), (2) et (3) :

(1) $$1 + \frac{3}{4} = 2 - \frac{1}{4};$$

(2) $$1 + \frac{3}{4} = x - \frac{1}{4};$$

(3) $$\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) \equiv x^2 - \frac{9}{16}.$$

71. Identité.

☆ DÉFINITION. — ***Une identité est une égalité qui est vraie quelles que soient les valeurs numériques données aux lettres qui y figurent, la même lettre ayant la même valeur numérique partout où elle se trouve.***

Les relations d'égalité fournies par l'addition et la multiplication des polynomes sont des identités. Nous avons trouvé, par exemple :

$$(8x^2 - 5x + 1) - (-3x^2 + 2x - 5) = 11x^2 - 7x + 6$$
$$(3x^2 - 5x + 1) \times (2x + 4) = 6x^3 + 2x^2 - 18x + 4.$$

Au contraire, l'égalité :

$$a + 2b = 3a^2 - b^2 + 22$$

est vérifiée pour $a = 1$ et $b = 4$, puisque :

$a + 2b$ a pour valeur numérique $1 + 8 = 9$;
$3a^2 - b^2 + 22$ — — $3 - 16 + 22 = 9$.

Mais, elle n'est pas vérifiée pour $a = 2$ et $b = 1$, puisque :

$a + 2b$ a pour valeur numérique $2 + 2 = 4$

$3a^2 - b^2 + 22$ — — $12 - 1 + 22 = 33$.

L'égalité écrite n'est pas une identité.

Pour distinguer une égalité d'une identité, on a l'habitude de remplacer le signe $=$ qui figure dans une égalité par le signe $\equiv$ qui se lit : *identique à*.

Exemples.

$$(8x^2 - 5x + 1) - (-3x^2 + 2x - 5) \equiv 11x^2 - 7x + 6;$$
$$(3x^2 - 5x + 1)(2x + 4) \equiv 6x^3 + 2x^2 - 18x + 4.$$

Lorsqu'on indique une propriété ou une règle de calcul au moyen d'une égalité, cette égalité est une identité car les propriétés et les règles s'appliquent à tous les nombres.

Exemples.

$$a + (b + c - d) \equiv a + b + c - d;$$
$$ab - ac + ad \equiv a(b - c + d);$$
$$abcd \equiv a(bc)d,$$
$$a^m \times a^p \equiv a^{m+p}.$$

72. Identités usuelles. — I. On a établi, en classe de 4e, les identités suivantes qu'il *faut connaître par cœur :*

$$(1) \quad (x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2,$$
$$(2) \quad (x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2,$$
$$(3) \quad (x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2.$$

Exemples. I.

$$(x + 4)(x - 4) \equiv x^2 - 16;$$
$$(x + 3)^2 \equiv x^2 + 6x + 9;$$
$$(x - 4)^2 \equiv x^2 - 8x + 16.$$

II.

$$(2a + 3b)(2a - 3b) \equiv 4a^2 - 9b^2;$$
$$(3a + b)^2 \equiv 9a^2 + 6ab + b^2;$$
$$(a - 2b)^2 \equiv a^2 - 4ab + 4b^2.$$

Ces identités doivent être connues, non seulement sous leur forme littérale, mais aussi lorsqu'on donne aux lettres x et y des valeurs quelconques.

Il faut, également, les reconnaître lorsqu'on les écrit en permutant les deux membres.

Avec un peu d'attention, on reconnaîtra facilement les identités suivantes :

$$4x^2 - 9 \equiv (2x + 3)(2x - 3);$$
$$x^2 + 4x + 4 \equiv (x + 2)^2;$$
$$x^2 - 2x + 1 \equiv (x - 1)^2.$$

II. Carré de x + y + z. Nous avons :

$$(x+y+z)^2 \equiv [(x+y)+z]^2$$
$$\equiv (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2$$
$$\equiv x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2;$$

d'où l'identité :

$$\boldsymbol{(x+y+z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx.} \qquad (4)$$

On en déduit :

$$(x-y-z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx,$$

en remplaçant, dans le 2e membre de (4), y par $-y$, z par $-z$ et, en remarquant que $-y$ et $-z$ ont pour carrés respectifs y^2 et z^2.

On ferait une observation analogue pour obtenir :

$$(x-y+z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx.$$

EXEMPLE. $(x^2 - 3x + 2)^2 \equiv x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 - 12x + 4x^2,$
$\equiv x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4.$

III. Cube de x + y. Nous avons :

$$(x+y)^3 \equiv (x+y)^2(x+y)$$
$$\equiv (x^2 + 2xy + y^2)(x+y)$$
$$\equiv x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$\equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3;$$

d'où l'identité :

$$\boldsymbol{(x+y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.} \qquad (5)$$

Il est parfois commode d'écrire :

$$(x+y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x+y).$$

On en déduit :

$$x^3 + y^3 \equiv (x+y)^3 - 3xy(x+y),$$

et, en mettant $(x+y)$ en facteur commun :

$$x^3 + y^3 \equiv (x + y\,[(x+y)^2 - 3xy)]$$
$$\equiv (x+y)(x^2 + 2xy + y^2 - 3xy)$$
$$\equiv (x+y)(x^2 - xy + y^2);$$

d'où l'identité :

$$\boldsymbol{x^3 + y^3 \equiv (x+y)(x^2 - xy + y^2).} \qquad (6)$$

EXEMPLES.

$$(x+1)^3 \equiv x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \qquad \text{par application de (5)}$$
$$x^3 + 1 \equiv x^3 + 1^3 \equiv (x+1)(x^2 - x + 1) \qquad \text{— (6)}$$
$$(2x+3)^3 \equiv 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 \qquad \text{— (5)}$$
$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 \equiv (x+2)(x^2 - 2x + 4) \qquad \text{— (6)}$$

En changeant y en $-y$ dans les identités (5) et (6) on obtient les identités :

$$\boldsymbol{(x-y)^3 \equiv x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.} \qquad (7)$$

que l'on écrit parfois :

$$(x-y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x-y),$$

$$\boldsymbol{x^3 - y^3 \equiv (x-y)(x^2 + xy + y^2).} \qquad (8)$$

EXEMPLES.
$$(x-1)^3 \equiv x^3 - 3x^3 + 3x - 1 \qquad \text{identité (7).}$$
$$x^3 - 8 \equiv (x-2)(x^2 + 2x + 4) \qquad \text{identité (8).}$$

73. Décomposition d'un polynome en un produit de facteurs. — Le produit de deux polynomes (ou d'un polynome par un monôme) est un polynome. On peut se demander si, inversement, un polynome donné est le produit de deux polynomes (ou d'un polynome et d'un monôme).

Nous traiterons ce problème sur quelques cas simples.

EXEMPLE. Soit le polynome :
$$P = x^2 - 9.$$
Il s'écrit aussi :
$$P = x^2 - 3^2,$$
et, en appliquant l'identité (1) :
$$P \equiv (x+3)(x-3).$$
On aboutit à l'identité :
$$x^2 - 9 \equiv (x+3)(x-3);$$
on dit que l'on a décomposé le polynome $x^2 - 9$ en un produit de facteurs.

☆ DÉFINITION. — ***On dit que l'on a décomposé un polynome en un produit de facteurs lorsque l'on a trouvé des polynomes ou des monômes dont le produit effectué est le polynome donné.***

Nous allons indiquer quelques cas de décomposition.

1er *cas : On peut mettre un monôme en facteur commun.*

EXEMPLE. $4x^4 - 8x^3y + 6x^2y^2 \equiv 2x^2(2x^2 - 4xy + 3y^2)$.

2e *cas : Dans une somme algébrique de produits, on peut mettre un polynome en facteur commun.*

EXEMPLES. I. $3(x-a) - 4(x-a) + 7(x-a) \equiv (3-4+7)(x-a)$
$\equiv 6(x-a)$.

II. $(x+y)(x^2+1) - (2x+2y)(x-1) + 3(x+y)(x^2-3x)$.

On observe que : $2x+2y \equiv 2(x+y)$.

On peut alors mettre $(x+y)$ en facteur commun et on obtient :

$(x+y)[(x^2+1) - 2(x-1) + 3(x^2-3x)]$,

ou : $(x+y)(x^2+1-2x+2+3x^2-9x)$,

soit : $(x+y)(4x^2-11x+3)$.

3e *cas : Utilisation des identités usuelles.*

EXEMPLES.

I. $4a^2b - b^3 \equiv b(4a^2-b^2) \equiv b(2a-b)(2a+b)$ identité (1)

II. $3x^2 - 12xy + 12y^2 \equiv 3(x^2-4xy+4y^2) \equiv 3(x-2y)^2$ — (3)

III. $a^3 - 8b^3 \equiv a^3 - (2b)^3 \equiv (a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$ — (8)

IV. $x^3 + 1\,000 \equiv x^3 + (10)^3 \equiv (x+10)(x^2-10x+100)$ — (6)

V. $x^3 + 27y^3 \equiv (x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$ — (6)

VI. Le polynome $(2x-1)^2 - 4(3x+2)^2$ peut s'écrire :

$(2x-1)^2 - 4(3x+2)^2 \equiv [(2x-1)+2(3x+2)][(2x-1)-2(3x+2)]$
$\equiv (8x+3)(-4x-5)$.

VII. $(5x-1)^2 - 9(x+3)^2 \equiv [5x-1+3(x+3)][5x-1-3(x+3)]$
$\equiv (8x+8)(2x-10) \equiv 8(x+1) \times 2(x-5)$
$\equiv 16(x+1)(x-5)$.

VIII. — Le polynome $A = 4x^2y^2 - (x^2+y^2-z^2)^2$ peut s'écrire :

$(2xy+x^2+y^2-z^2)(2xy-x^2-y^2+z^2) \equiv$
$[(x^2+2xy+y^2)-z^2]\ [z^2-(x^2-2xy+y^2)] \equiv [(x+y)^2-z^2]\ [z^2-(x-y)^2]$;

d'où : $A \triangleq (x+y+z)(x+y-z)(z+x-y)(z-x+y)$.

IX. $x^6 - y^6 \equiv (x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$\equiv (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

4[e] *cas : Chercher à grouper certains termes de façon à faire apparaître un facteur commun.*

EXEMPLES. I. $xy + 3x - 2y - 6.$

On remarque que x est un facteur commun pour les deux premiers termes et -2 pour les deux derniers, d'où :

$$xy + 3x - 2y - 6 \equiv x(y + 3) - 2(y + 3)$$

et, en mettant $(y + 3)$ en facteur commun :

$$xy + 3x - 2y - 6 \equiv (y + 3)(x - 2).$$

II. $A \equiv x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3.$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} A &\equiv (x^3 + 2x^2y) - (xy^2 + 2y^3) \\ &\equiv x^2(x + 2y) - y^2(x + 2y) \\ &\equiv (x + 2y)(x^2 - y^2) \\ &\equiv (x + 2y)(x - y)(x + y). \end{aligned}$$

• REMARQUE. Une décomposition n'est pas terminée tant que les facteurs obtenus n'ont pas le plus petit degré possible.

Ainsi, on vient de voir que l'on a :

$$x^3 + 2x^3y - xy^2 - 2y^3 \equiv (x^2 - y^2)(x + 2y).$$

On ne s'est pas arrêté là et on a remplacé $(x^2 - y^2)$ par $(x + y)(x - y)$.

De la même façon, on écrira :

$$4x^5 - 9x^3 \equiv x^3(4x^2 - 9)$$

et on continuera à décomposer $4x^2 - 9$ pour obtenir finalement :

$$4x^5 - 9x^3 \equiv x^3(2x + 3)(2x - 3).$$

Toutefois l'un des facteurs obtenus peut être une puissance de polynome.

On écrira, par exemple :

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 9x - 27 &\equiv x^2(x + 3) - 9(x + 3) \\ &\equiv (x + 3)(x^2 - 9) \\ &\equiv (x + 3)(x + 3)(x - 3) \\ &\equiv (x + 3)^2(x - 3). \end{aligned}$$

• Applications.

Démontrer les identités suivantes :

194. $(x + y)^2 - (x - y)^2 \equiv 4xy.$

195. $(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) \equiv x^4 - y^4.$

196. $(x + y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) \equiv x^4 - y^4.$

197. $(x - y)(x + y - z) + (y - z)(y + z - x) + (z - x)(z + x - y) \equiv 0.$

Compléter les expressions ci-dessous pour que chacune d'elles soit le carré d'un binome :

198. $x^2 + \dots + 9$; $x^2 - \dots + 9$.

199. $x^2 + 2x + \dots$; $x^2 - 2x + \dots$.

200. $x^2 + 6x + \dots$; $x^2 - 8x + \dots$.

201. $4x^2 + 12x + \dots$; $9x^2 - 6ax + \dots$.

202. $x^2 + 10x + \dots$; $16x^2 - \dots + 9$.

203. $x^2 - x + \dots$; $\frac{x^2}{16} + \dots + 25$.

Utiliser les identités usuelles du n° 72 pour calculer :

204. $(3x - 1)^2$; $(2x + 7y)^2$; $\left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

205. $(4x + 3y)^2$; $(7x + 4)(7x - 4)$; $\left(\frac{x}{3} - 1\right)^2$.

206. $(4x^2 + 1)^2$; $(3xy - 2y)^2$; $(x^2y + 2z^3)(x^2y - 2z^3)$.

207. $(x - \sqrt{2})^2$; $(x\sqrt{3} + 1)^2$; $(x\sqrt{2} + y\sqrt{3})^2$.

208. $(3x + 2y + 1)^2$; $\left(\frac{x}{2} + y + \frac{1}{4}\right)^2$; $(x - 2y + 3z)^2$.

209. $(3x + 1)^3$; $(x - 2y)^3$; $\left(2x - \frac{y}{2}\right)^3$.

210. $(x + 2)^2 + 2(x + 2)(x - 2) + (x - 2)^2$.

211. $(3x - y)(3x + y)$; $(5x^2 - y^2)(5x^2 + y^2)$; $(x - 3y)(x + 3y)$.

212. $(x + y)^3(x - y)^3$; $(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

213. $(3x + y - 2)(3x - y + 2) - (3x - 2)(3x + 2)$.

Décomposer en un produit de facteurs chacun des polynomes suivants :

214. $x^2 - x$; $2x^2 - 6x$; $x^3 - x$.

215. $x - 25x^3$; $4x^2 - 1$; $x^2y - 9y^3$.

216. $4x^3 - 8x^2 + 4x$ (¶ Mettre $4x$ en facteur commun).

217. $(2x + 5)^2 - (x - 3)^2$; $(x + 2)^2 - (4x - 1)^2$.

218. $4x^2(x - 1) - 32x(x - 1) + 64(x - 1)$.

219. $9x^2 - 1$; $9x^3 - x$; $12x^3 - 3x$.

220. $4x^2 - 9y^2$; $12x^2 - 27y^2$; $12a^3x^2 - 27a^3y^2$.

221. $100x^4 - 64$; $49x^2y^2 - 4x^4$; $x^4 - y^4$.

222. $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$; $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$.

223. $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$; $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$.

224. $(a - 2b)^2 - (a + b)^2$; $(2a - b)^2 - (a - 2b)^2$.

225. $x^3 + 3x^2 - x - 3$; $x^3 + x^2 - 9x - 9$.

226. $x^4 - 16y^4$; $12x^3 - 3xy^2$.

V. FRACTIONS RATIONNELLES

Travaux pratiques d'initiation.

1° Comment appelle-t-on l'écriture $\dfrac{-7}{+\dfrac{3}{4}}$?

2° Calculer $\dfrac{-7}{+\dfrac{3}{4}} + \dfrac{1-\dfrac{7}{5}}{2-\dfrac{3}{8}}$.

3° L'expression $\dfrac{4\,a^2bc}{ab}$ a-t-elle une valeur numérique quelles que soient les valeurs numériques de a, b, c?
Lorsqu'elle en a une, peut-on simplifier l'expression?

4° Mêmes questions pour : $\dfrac{x^2-1}{x-1}$, et pour : $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2-2\,x}$,
x ayant une valeur quelconque.

5° Calculer les valeurs numériques des expressions :

$$A = \frac{a^3 - 3\,a^2b + 3\,ab^2 - b^3}{a^4 - 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 - 4\,ab^3 + b^4}; \qquad B = \frac{1}{a-b};$$

pour : $a = \dfrac{1}{2}$, $\quad b = -2$.

74. Quotient de deux monômes. — Soit deux monômes A et B. Si l'on donne aux variables qui y figurent des valeurs particulières, les monômes A et B prennent des valeurs numériques respectives a et b. Le rapport $\dfrac{a}{b}$ a un sens si $b \neq 0$. Nous dirons que ce rapport est la valeur numérique du quotient $\dfrac{A}{B}$ des monômes pour les valeurs données aux variables.

EXEMPLES. I. $A = 4\,xy^2; \quad B = 5\,z^2.$

Si l'on donne à x, y, z des valeurs particulières x_0, y_0, z_0 :

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0 \neq 0,$$

le rapport $\frac{4\,x_0y_0^2}{5\,z_0^2}$ a un sens qui est la valeur numérique du quotient $\frac{4\,xy^2}{5\,z^2}$ pour :

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0.$$

II. $A = 16\,x^3y^2z; \quad B = 10\,xy^3.$

Si l'on donne à x, y, z des valeurs particulières x_0, y_0, z_0, les monômes A et B prennent respectivement les valeurs :

$$a = 16\,x_0^3y_0^2z_0 \qquad \text{et} \qquad b = 10\,x_0y_0^3$$

dont le rapport est :

$$\frac{a}{b} = \frac{16\,x_0^3y_0^2z_0}{10\,x_0y_0^3}.$$

On peut écrire :

$$\frac{a}{b} = \frac{2\,x_0y_0^2 \times 8\,x_0^2z_0}{2\,x_0y_0^2 \times 5\,y_0} = \frac{8\,x_0^2z_0}{5\,y_0}.$$

L'expression $\frac{8\,x^2z}{5\,y}$ prend donc la même valeur numérique que $\frac{A}{B}$ pourvu que le facteur commun $2\,x_0y_0^2$, par lequel on a simplifié, ne soit pas nul. On peut donc écrire :

$$\frac{A}{B} = \frac{8\,x^3z}{5\,y}, \qquad \text{si} \qquad xy \neq 0.$$

Dans l'exemple II, on a simplifié le quotient $\frac{A}{B}$ des monômes A et B. On pourra toujours procéder à cette simplification lorsque A et B auront un facteur commun. On obtiendra une nouvelle expression algébrique qui prend les mêmes valeurs numériques que $\frac{A}{B}$ pour toutes les valeurs numériques attribuées aux variables, *exception faite pour celles de ces valeurs qui annulent le facteur commun.*

EXEMPLES. $\frac{15\,x^2y^3}{5\,x^2y} = 3\,y^2$ si $xy \neq 0$ (facteur commun $5\,x^2y$),

$\frac{4\,ax^2y^4}{5\,x^2y^2} = \frac{4}{5}\,ay^2$ si $xy \neq 0$ (facteur commun x^2y^2).

Dans ces exemples, le quotient $\frac{A}{B}$ est un monôme. Cela arrivera chaque fois que le monôme dividende contient toutes les lettres du monôme diviseur avec un exposant au moins égal à celui qu'elles ont dans le diviseur, et dans ce cas seulement.

75. Fraction rationnelle.

☆ DÉFINITION. — ***On appelle* fraction rationnelle *une expression algébrique qui indique le quotient de deux polynomes (ou monômes).***

Si P et Q sont deux polynomes (ou monômes), la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est l'expression algébrique dont la valeur numérique est le rapport des valeurs numériques respectives p et q prises par P et Q lorsqu'on donne aux variables qui figurent dans P et Q des valeurs quelconques (qui n'annulent pas Q).

EXEMPLES.

$\frac{x^2}{x+2}$	est une fraction rationnelle qui a un sens pour		$x \neq -2$;
$\frac{x^2-y}{x-3}$	—	—	$x \neq 3$;
$\frac{4xy}{z}$	—	—	$z \neq 0$;
$\frac{4xy^2+5z^2}{x+y}$	—	—	$x+y \neq 0$.

■ ***Une fraction rationnelle n'a pas de sens pour les valeurs des variables qui annulent le dénominateur.***

76. Simplification d'une fraction rationnelle.

1° *Les deux termes sont des monômes.* On aperçoit immédiatement les facteurs communs, s'ils existent, aux deux termes.

EXEMPLE. $\frac{8x^3y^2}{12x^2yz^2} = \frac{2xy}{3z^2}$, en simplifiant par $4x^2y$, et en supposant $xy \neq 0$.

2° *Les deux termes sont des polynomes (ou l'un d'eux est un monôme) qui ont des facteurs monômes communs.*

EXEMPLES. I. $\frac{4a^2x^2+6ax^3}{12a^3x^3} = \frac{2ax^2(2a+3x)}{2ax^2 \times 6a^2x} = \frac{2a+3x}{6a^2x}$, si $ax \neq 0$,

en simplifiant par $2ax^2$ qui divise les deux termes du numérateur et le dénominateur.

II. $\frac{4x^4y^3-16x^2y^2}{8x^2y^4+12x^2y^3} = \frac{4x^2y^2(x^2y-4)}{4x^2y^2(2y^2+3y)} = \frac{x^2y-4}{y(2y+3)}$, si $xy \neq 0$.

3° *Les deux termes sont des polynomes n'ayant pas de facteurs monômes communs.*

On s'efforcera de les décomposer en produits de facteurs en utilisant les méthodes indiquées au n° 73 et on simplifiera par les facteurs communs s'il y en a.

EXEMPLES. Soit la fraction rationnelle $A = \dfrac{(x^2 - 4)(x^2 + 3x + 1)}{(x^2 - 4)(x + 1)}$.

Si l'on donne à x une valeur numérique quelconque, A prend la même valeur numérique que la fraction rationnelle B :

$$B = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}.$$

Toutefois, si l'on donne à x la valeur $+2$, la fraction A n'a pas de sens; au contraire B prend la valeur $\dfrac{11}{3}$. De même, pour $x = -2$, A n'a pas de sens et B a pour valeur 1.

Enfin, ni A ni B n'ont de valeur numérique pour $x = -1$. Ces valeurs exceptionnelles : $+2$; -2; -1 mises à part, la fraction rationnelle B prend même valeur numérique que la fraction rationnelle A.

■ ***On simplifie une fraction rationnelle comme une fraction ordinaire, en divisant les deux termes par un facteur commun.***

Les identités du n° 72 sont précieuses pour faire apparaître des facteurs communs.

EXEMPLES. I. $\dfrac{5x^2 - 5y^2}{3x + 3y} = \dfrac{5(x^2 - y^2)}{3(x + y)} = \dfrac{5(x + y)(x - y)}{3(x + y)} = \dfrac{5}{3}(x - y)$,

si $x + y \neq 0$.

II.
$$\frac{x^2 + 2xy + y^2 - z^2}{x^2 + 2xz + z^2 - y^2} = \frac{(x + y)^2 - z^2}{(x + z)^2 - y^2}$$
$$= \frac{(x + y + z)(x + y - z)}{(x + z + y)(x + z - y)}$$
$$= \frac{x + y - z}{x + z - y},$$

si $x + y + z \neq 0$ et $x + z - y \neq 0$.

III.
$$A = \frac{(x^3 - y^3)(x^2 + 2xy + y^2)}{(x^2 - y^2)(x + 2y)}.$$

On a :
$$x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2);$$
$$x^2 + 2xy + y^2 \equiv (x + y)^2;$$
$$x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y).$$

Donc :

$$A = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)^2}{(x+y)(x-y)(x+2y)}$$

et, en simplifiant par $(x-y)(x+y)$, on obtient la fraction rationnelle :

$$B = \frac{(x^2+xy+y^2)(x+y)}{x+2y}.$$

A et B prennent les mêmes valeurs numériques pour toutes les valeurs de x et de y, exception faite de celles pour lesquelles $(x-y)(x+y)=0$.

Si $x+y=0$, on a : $B=0$ et A n'a pas de sens.

Si $x-y=0$, on a : $B = \frac{6x^3}{3x} = 2x^2$ (si $x \neq 0$) et A n'a pas de sens.

Si $x+2y=0$, ni A ni B n'ont de sens.

77. Réduction de fractions rationnelles au même dénominateur. — On procède comme en Arithmétique. Mais il est important d'avoir des polynomes du plus petit degré possible. Aussi commence-t-on par décomposer les dénominateurs en produits de facteurs; on forme ensuite le dénominateur commun de plus petit degré possible.

Exemples. I. *Réduire au même dénominateur les fractions rationnelles :*

$$A = \frac{x-1}{x+1}; \qquad B = \frac{x^3-2x+1}{x}.$$

À cause des dénominateurs, on ne peut donner à x ni la valeur -1 ni la valeur 0. Le dénominateur commun est $x(x+1)$. D'où :

$$A = \frac{(x-1)x}{x(x+1)} = \frac{x^2-x}{x(x+1)};$$

$$B = \frac{(x^3-2x+1)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x^4+x^3-2x^2-x+1}{x(x+1)}.$$

II. *Réduire au même dénominateur les fractions rationnelles :*

$$C = \frac{3x}{x-3}; \qquad D = \frac{x+1}{x+3}, \qquad E = \frac{x^2}{x^2-9} \qquad (x \neq 3 \quad \text{et} \quad x \neq -3).$$

Comme l'on a : $x^2-9 \equiv (x-3)(x+3)$, le dénominateur commun est x^2-9. On obtient donc :

$$C = \frac{3x(x+3)}{x^2-9} = \frac{3x^2+9x}{x^2-9};$$

$$D = \frac{(x+1)(x-3)}{x^2-9} = \frac{x^2-2x-3}{x^2-9};$$

$$E = \frac{x^2}{x^2-9}.$$

78. Addition et soustraction. — Les fractions rationnelles (simplifiées, si possible) seront d'abord réduites au même dénominateur et on opérera comme sur des fractions ordinaires.

EXEMPLES. I. *Calculer :* $A + B$ *et* $A - B$ *avec :* $A = \dfrac{x-1}{x+1}$; $B = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x}$.

En réduisant A et B au même dénominateur, nous avons trouvé (n° 77, I) :

$$A = \frac{x^2 - x}{x(x+1)}, \qquad B = \frac{x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1}{x(x+1)},$$

d'où : $$A + B = \frac{x^2 - x + x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1}{x(x+1)} = \frac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 1}{x(x+1)};$$

$$A - B = \frac{x^2 - x - x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1}{x(x+1)} = \frac{-x^4 - x^3 + 3x^2 - 1}{x(x+1)}.$$

II. *Calculer :* $$\frac{3x}{x-3} + \frac{x+1}{x+3} - \frac{x^2}{x^2-9}.$$

En utilisant les résultats du n° 77, II, nous obtenons :

$$\frac{3x^2 + 9x}{x^2 - 9} + \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} - \frac{x^2}{x^2 - 9} = \frac{3x^2 + 9x + x^2 - 2x - 3 - x^2}{x^2 - 9}$$
$$= \frac{3x^2 + 7x - 3}{x^2 - 9}.$$

III. *Calculer :* $S = \dfrac{x-y}{x+y} + \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{4xy}{x^2 - y^2}$ $(x + y \neq 0; x - y \neq 0)$.

Le dénominateur commun est $x^2 - y^2$ et l'on a :

$$S = \frac{(x-y)^2 + (x+y)^2 + 4xy}{(x+y)(x-y)} = \frac{2x^2 + 2y^2 + 4xy}{(x+y)(x-y)};$$

$$S = \frac{2(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}.$$

En simplifiant par $(x + y)$, on obtient la fraction rationnelle : $S' = \dfrac{2(x+y)}{x-y}$.

Si $x + y = 0$ on a $S' = 0$ et S n'a pas de sens.
Si $x - y = 0$ ni S ni S' n'ont de sens. Si $(x-y)(x+y) \neq 0$ on a $S = S'$.

• REMARQUE. — Il ne faut pas oublier, quand une fraction est à retrancher, de mettre entre parenthèses son numérateur quand on donne à toutes les fractions le dénominateur commun :

EXEMPLE. $$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{2(x+1) - (x-1) - 2}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{2x + 2 - x + 1 - 2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1}.$$

79. Multiplication et division. — Les deux fractions rationnelles $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ étant données, la fraction $\frac{AC}{BD}$ prend une valeur numérique qui est le produit des valeurs numériques de $\frac{A}{B}$ et de $\frac{C}{D}$. La fraction rationnelle $\frac{AC}{BD}$ est donc le produit des fractions rationnelles $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$.

De même, la fraction rationnelle $\frac{AD}{BC}$ est le quotient de la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ par la fraction rationnelle $\frac{C}{D}$.

Les résultats s'obtiennent sous forme de produits au numérateur et au dénominateur. *On se gardera de les effectuer* et on cherchera les simplifications, s'il y a lieu.

EXEMPLES. I. $$A = \frac{5}{3x - 6} \times \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{5(x^2 - 4)}{(3x - 6)x^2}.$$

Or : $$x^2 - 4 \equiv (x - 2)(x + 2)$$
$$3x - 6 \equiv 3(x - 2).$$

Donc : $$A = \frac{5(x - 2)(x + 2)}{3(x - 2)x^2}.$$

En simplifiant par $x - 2$, on obtient la fraction rationnelle :

$$B = \frac{5(x + 2)}{3x^2}.$$

A et B prennent les mêmes valeurs pour toutes les valeurs de x sauf :

1° pour $x = 2$, où $B = \frac{5}{3}$ et A n'a pas de sens;

2° pour $x = 0$, où A et B n'ont pas de sens.

II. $$A = \left(1 - \frac{9}{x^2}\right) : \frac{x - 3}{4x} \qquad (x \neq 0;\ x \neq 3).$$

$$A = \frac{x^2 - 9}{x^2} \times \frac{4x}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)4x}{x^2(x - 3)}.$$

En simplifiant par $x(x - 3)$ on obtient la fraction rationnelle :

$$B = \frac{4(x + 3)}{x}.$$

Si $x = 3$, $B = 8$ et A n'a pas de sens.
Si $x = 0$, A et B n'ont pas de sens.
Pour toutes les autres valeurs de x, $A = B$.

On peut avoir à simplifier une expression qui est le quotient de sommes, de produits ou de quotients de fractions rationnelles. On réduit alors séparément numérateur et dénominateur en fractions, puis on divise la première par la seconde.

EXEMPLES. Soit à calculer :

$$A = \frac{1 + \left(\frac{x-2}{x+2}\right)}{1 - \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2}.$$

La fraction rationnelle $\frac{x-2}{x+2}$ n'a pas de sens pour $x = -2$. L'expression A n'a pas de sens pour les valeurs de x telles que :

$$\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2 = 1. \qquad (1)$$

Or le carré d'un nombre n'est égal à 1 que si ce nombre est $+1$ ou -1. Les valeurs de x qui satisfont à (1) sont donc, si elles existent, celles qui vérifient :

$$\frac{x-2}{x+2} = 1, \qquad (2)$$

ou

$$\frac{x-2}{x+2} = -1. \qquad (3)$$

La condition (2) exige l'égalité de $x-2$ et de $x+2$, ce qui est impossible. La condition (3) exige que les nombres $x-2$ et $x+2$ soient opposés, soit :

$$x - 2 + x + 2 = 0, \text{ c'est-à-dire } x = 0.$$

Finalement, l'expression A n'a de valeur numérique que si x est différent de -2 et de 0.

Le numérateur s'écrit alors :

$$N = \frac{(x+2)^2 + (x-2)^2}{(x+2)^2} = \frac{2(x^2+4)}{(x+2)^2},$$

et le dénominateur :

$$D = \frac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{(x+2)^2} = \frac{8x}{(x+2)^2}.$$

A prend donc la même valeur numérique que la fraction rationnelle :

$$B = \frac{2(x^2+4)}{8x} = \frac{x^2+4}{4x}.$$

Pour $x = 0$, A et B n'ont pas de sens.
Pour $x = -2$, A n'a pas de sens et $B = -1$.

• **Applications.**

227. — *Calculer les quotients de monômes suivants et préciser dans quelles conditions les calculs sont possibles :*

1° $\frac{-x^4y^2}{3xy}$; $\frac{5x^2y}{10xy^2}$; $\frac{15a^2x^2}{6a^3x}$; $\frac{20axy}{15ay^2}$.

2° $\frac{-3xy^2z^3}{-2x^3y^2z}$; $\frac{9x^2y^2z^4}{-2x^4y}$; $\frac{\sqrt{2}xyz}{\sqrt{6}xy^2z}$; $\frac{7a^5b^2c}{-3a^3bc^2}$.

228. — *Pour chacune des fractions rationnelles suivantes indiquer dans quelles conditions elle a un sens :*

1° $\frac{x+3}{x}$; $\frac{x^4-1}{x-3}$; $\frac{x^2+5}{x+3}$; $\frac{x+2}{x^2+5}$.

2° $\frac{4x+2y}{x-y}$; $\frac{7x-1}{x^2-1}$; $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; $\frac{4x-3y}{4x+3y}$.

Simplifier chacune des fractions rationnelles suivantes et préciser les valeurs exceptionnelles pour lesquelles la fraction donnée et la fraction simplifiée n'ont pas la même valeur numérique :

229. $\frac{(x-2)(x+3)}{x^2-4}$; $\frac{25x^2-y^2}{(5x-y)^2}$; $\frac{4xy(x-y)}{y(x+y)}$; $\frac{(3x-2)(5x+4)}{(8x-1)(2-3x)}$.

230. $\frac{7x^2+7xy}{5xy+5y^2}$; $\frac{4a^2-4ax}{6ax-6x^2}$; $\frac{a^2-x^2}{(a-x)^2}$; $\frac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}$.

231. $\frac{2x^2-18y^2}{3x^2+18xy+27y^2}$; $\frac{x^3-y^3}{4x-4y}$; $\frac{x^3+8y^3}{x+2y}$; $\frac{9x^4-1}{6x^2y^2+2y^2}$.

Réduire en une seule fraction, la plus simple possible :

232. $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}$; $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}$.

233. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}+\frac{1-2x^2}{x^2-1}$; $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}-\frac{1-2x^2}{x^2-1}$.

234. $\frac{x}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}+x$; $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}$.

235. $\frac{x}{y(x-y)}+\frac{y}{x(x-y)}-\frac{2}{x-y}$; $\frac{x}{y(x+y)}-\frac{y}{x(x+y)}+\frac{2}{x}$.

236. $\frac{2x^2-2x+1}{x^2-x}-\frac{x}{x+1}$; $\frac{ax}{a^2-x^2}-\frac{a-x}{a+x}$; $\frac{ax-a}{x+1}-\frac{ax+a}{x-1}$.

237. $\frac{1+4x}{1-4x}-\frac{1-4x}{1+4x}$; $1+\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$; $1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

238. $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2-1}$; $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}$.

Calculer et simplifier les produits suivants (on précisera dans quelles conditions les simplifications sont possibles) :

239. $\frac{2xy}{ab}\times\frac{a^2}{x^2}$; $\frac{4x^3y}{a^3b}\times\frac{5a^3}{8b^3}$; $30\frac{x}{y}\times\frac{y^2}{15x^2}$.

240. $\frac{x^2+1}{x^2-1}\times\frac{x-1}{x+1}$; $\frac{x^3-1}{x+1}\times\frac{x^3+1}{x-1}$; $\frac{x^2-16}{x^2-25}\times\frac{x^2-5x}{xy-4y}$.

241. $\frac{3x}{x-y}\times\frac{x^2-y^2}{9}$; $\frac{x^2-1}{y}\times\frac{y^2}{x+1}$; $\frac{x^2-y^2}{x}\times\frac{xy}{x^2+y^2}$.

242. $\frac{ab}{a^2-b^2}\times\frac{a+b}{a}\times\frac{a-b}{2b}$; $\frac{(x-1)^2}{y^3}\times\frac{(x+1)y^2}{x-1}$.

Calculer et simplifier les quotients suivants de fractions rationnelles (on précisera dans quelles conditions les simplifications sont possibles) :

243. $\frac{4}{5}\frac{y^2}{x}:\frac{5}{6}\frac{y^3}{x^2}$; $\frac{2}{5}\frac{x^2}{y}:\frac{3}{5}\frac{x}{y^2}$; $\frac{4ab}{x^2}:\frac{ba^2}{xy}$.

244. $\frac{2x}{x+3}:\frac{6x}{2x+6}$; $\frac{5x-2}{x-3}:\frac{x+2}{4x-12}$; $\frac{x^2-16}{x^2-25}:\frac{2x-4}{3x-15}$.

245. $\frac{x-y}{3x}:\frac{x^2-y^2}{9y}$; $\frac{a^2-4}{b}:\frac{a+2}{b^2}$; $\frac{xy}{x-1}:\frac{y^2}{(x-1)^2}$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

★

246. — Décomposer en produits de facteurs les expressions :

$$B=2x^2-12x+18 \quad \text{et} \quad C=x^2-2x-3.$$

Pour l'expression C, on se servira du fait qu'elle peut s'écrire :

$$C=(x-1)^2-4.$$

Simplifier alors la fraction :

$$\frac{B}{C}=\frac{2x^2-12x+18}{x^2-2x-3}.$$

247. — On donne les polynomes :

$$A = x^2 - 3x + 2; \qquad B = x^2 + 3x + 2.$$

Calculer $A + B$, $A - B$ et AB.

Vérifier que les valeurs numériques de ces trois résultats de calcul sont la somme, la différence et le produit des valeurs numériques, prises par A et par B, quand on donne à x une valeur numérique quelconque. Prendre, pour la vérification :

$$x = 0; \qquad x = 1; \qquad x = 2; \qquad x = -2; \qquad x = 10.$$

(¶ *Disposer sous forme de tableau.*)

248. — On suppose que le produit de deux monômes A et B est du 7ᵉ degré par rapport à l'ensemble des variables x, y, z.

1° Le monôme A est du troisième degré relativement à l'ensemble des variables. Peut-il contenir les trois lettres x, y, z ?

2° Quel est le degré du monôme B relativement à l'ensemble des variables ? Quelles sont les formes possibles de B, sachant que son coefficient est -1 et que sa partie littérale contient x^2 ?

Calculer les sommes de polynomes et opérer les réductions :

249. $(a + b - c) - (a - b - c) + (a + b + c) - (b + c - a) - (a - b - c)$.

250. $6x - [x^2 - (8 - 3x) + 1] + [7x^2 - 12(x - 4) - 3] - x^2(x - 1)$.

251. $\dfrac{(x-3)^2}{6} + \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(x+1)^2}{18}$; $\quad \dfrac{(x+1)^2}{12} - \dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^2}{15}$.

252. $(2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2 + (2a + 2b - c)^2$.

Calculer les produits suivants :

253. $(x^2 - 5x + 4)(x^2 + 5x - 4)$; $\quad (x^2 + x - 1)(x^2 + x + 1)$.

254. $(x^2 + 3x + 5)(x^2 - 3x + 5)$; $\quad (a + b - c)(a - b + c)$.

255. $(a^2 + 2ab + 4b^2)(a - 2b)$; $\quad (a^2 - 3ab + 9b^2)(a + 3b)$.

256. $(x^2 - 4)(x^2 + 4)$; $\quad (a^2 - 1)(a^2 + 1)$.

257. — Effectuer les opérations indiquées sur les expressions suivantes où x et y sont des nombres positifs et simplifier s'il y a lieu (indiquer les valeurs exceptionnelles) :

1° $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{3}xy \times \sqrt{8}\dfrac{x^2}{y}$; $\quad \sqrt{xy} \times \dfrac{\sqrt{x^3y}}{4}$; $\quad \sqrt{2x} \times \sqrt{8x^3}$.

2° $\quad \sqrt{2}\,xy : \sqrt{6}\,xy^2$; $\quad \sqrt{\dfrac{x^2}{y}} : \sqrt{\dfrac{x}{y^3}}$; $\quad \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{xy}{5}} : \dfrac{5x}{6y}$.

258. — Déterminer a, b, c pour que l'on ait l'identité :

$$(ax^2 + bx + c)(x^2 + 1) \equiv 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 6x - 7.$$

Vérifier les identités suivantes :

259. $(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2 \equiv 2(a-d)(a+b+c+d)$.

260. $(a+b+c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \equiv 3(a^2+b^2+c^2)$.

261. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) \equiv (a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$.

262. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2) \equiv$
$(ab+bc+ca)(a-b)(a-c)\ (b-c)$.

Effectuer les opérations indiquées et simplifier, s'il y a lieu :

263. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$.
Comparer le résultat avec : $(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$.

264. $(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$.

265. $(a+b-c)(a+b)+(a-b+c)(a+c)+\ (b+c-a)\ (b+c)$.

Décomposer en un produit de facteurs chacune des expressions suivantes :

266. $x^2+y^2+2\,xy-4\,a^2+12\,ab-9\,b^2$.

267. $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$.

268. $(x+y-z)^2-(z-x+y)^2$.

269. $(x+y)^3-(x-y)^3$; $(x^2+x+1)^2-(x^2+x-1)^2$.

270. $a^2-2\,by-y^2+x^2-2\,ax-b^2$.

271. $(xy+1)^2-(x+y)^2$ (¶ *Produit de 4 facteurs du* 1[er] *degré.*)

272. $(2\,x+1)(5\,x+3)+(2\,x+1)(x+2)-(2\,x+1)(2\,x-1)$.

273. $(3\,x+2)(x-3)+(x-3)^2+x^2-9$.

274. $(2\,x+3)(x+7)-(2\,x+3)^2+6\,x+9$.

275. $(x-5)^2+x^2-25-(5-x)(2\,x+1)$.

276. $(2\,x-3)^2+(3-2\,x)(x-1)-6+4\,x$.

Simplifier les fractions rationnelles suivantes et indiquer dans quelles conditions les simplifications sont possibles :

277. $\dfrac{a^2+2\,ab+b^2-c^2}{a^2+2\,ac+c^2-b^2}$; $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{a^2-2\,ab+b^2-c^2}$.

278. $\dfrac{(x+1)^4-(x-1)^4}{8\,x^5+16\,x^3+8\,x}$; $\dfrac{25\,x^2-20\,x+4}{25\,x^2-4}$.

Réduire en une seule fraction, la plus simple possible :

279. $\left(x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-\sqrt{2}\right)$; $\dfrac{2\,x}{2\,b-c}\left(\dfrac{b+c}{3}-\dfrac{c}{2}\right)$.

280. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{4\,x}{x^2-1}$; $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-1}$.

281. $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; $x+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}$.

282. $\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}-\dfrac{1}{x(x-1)}+\dfrac{2}{x^2-1}$; $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

283. $\left(1-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x+y}{x-y}-1\right)$; $\left(x+\frac{x}{x-1}\right):\left(x-\frac{x}{x-1}\right)$.

284. $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$; $\left(\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}\right):\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$.

285. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-\frac{4x^2}{1-x^4}$; $\frac{2}{(x-1)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-2)}$.

286. $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}:\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$; $\frac{x^3+27}{x^3-8}:\frac{5x+15}{6x-12}$.

287. $\frac{3x^2+a^2}{x^2+2ax+a^2}-\frac{2x}{a+x}$; $\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2}$.

288. $\frac{1}{x^3-1}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+x+1}$.

★ ★

Problème résolu. — 1° Calculer le carré du polynome x^2+px+q.
2° Vérifier l'identité :

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 \equiv (x^2+3x+1)^2. \qquad (1)$$

3° Déterminer a et b pour que le polynome :

$$x^4+2x^3+ax^2+bx+1$$

soit le carré d'un polynome du second degré.

SOLUTION.

1° *En utilisant une identité usuelle, on trouve :*

$$(x^2+px+q)^2 \equiv x^4+p^2x^2+q^2+2px^3+2pqx+2qx^2.$$

ou, en réduisant et ordonnant :

$$(x^2+px+q)^2 \equiv x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2. \qquad (2)$$

2° *On obtient, en vertu de* (2) :

$$(x^2+3x+1)^2 \equiv x^4+6x^3+11x^2+6x+1.$$

D'autre part :

$$x(x+1) \equiv x^2+x;$$
$$(x+2)(x+3) \equiv x^2+5x+6.$$

D'où en faisant la multiplication :

$$x(x+1)(x+2)(x+3) \equiv x^4+6x^3+11x^2+6x.$$

$$\begin{array}{r} x^2+5x+6 \\ x^2+x \\ \hline x^4+5x^3+6x^2 \\ x^3+5x^2+6x \\ \hline x^4+6x^3+11x^2+6x \end{array}$$

L'identité (1) *en résulte immédiatement.*

3° *On doit avoir, pour des valeurs convenables de* a, b, p *et* q, *l'identité :*

$$x^4+2x^3+ax^2+bx+1 \equiv (x^2+px+q)^2,$$

soit :

$$x^4+2x^3+ax^2+bx+1 \equiv x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2.$$

Par suite, on a les égalités :

$$2 = 2\,p \iff p = 1 \qquad (3)$$
$$a = p^2 + 2\,q \qquad (4)$$
$$b = 2\,pq \qquad (5)$$
$$1 = q^2 \iff q = \pm 1. \qquad (6)$$

Si $q = 1$, *l'égalité* (5) *donne* $b = 2$ et *l'égalité* (4) *donne* $a = 3$.
On a alors :

$$x^4 + 2\,x^3 + 3\,x^2 + 2\,x + 1 \equiv (x^2 + x + 1)^2.$$

Si $q = -1$, *l'égalité* (5) *donne* $b = -2$ et *l'égalité* (4) *donne* $a = -1$.
On a alors :

$$x^4 + 2\,x^3 - x^2 - 2\,x + 1 \equiv (x^2 + x - 1)^2.$$

289. — 1° Déterminer a et b pour que le polynome :

$$x^4 + 4\,x^3 + 6\,x^2 + ax + b$$

soit le carré d'un polynome du second degré.
2° Même question avec le polynome :

$$x^4 - 6\,x^3 + 13\,x^2 + ax + b.$$

290. — Démontrer l'implication :

$$\left.\begin{aligned} x &= a^2 - bc \\ y &= b^2 - ac \\ z &= c^2 - ab \end{aligned}\right\} \implies (x + y + z)(a + b + c) \equiv ax + by + cz.$$

291. — On donne les polynomes :

$$A = x^3 - 4\,x^2 - 5\,x + 1,$$
$$B = 2\,x^3 + x^2 + 4\,x - 3,$$
$$C = x^3 - x^2 - 5\,x + 2.$$

1° Calculer :

$$D = A + B + C; \quad E = A - B + C; \quad F = A + B - C; \quad G = B + C - A.$$

2° Calculer $E + F + G$ et comparer cette somme à D.
3° Le résultat du 2° est-il dû au choix des polynomes A, B, C ou en serait-il de même avec trois polynomes quelconques ?

292. — Soit l'expression :

$$y = (x^2 - 9)^2 - (x + 3)^2.$$

1° La développer.
2° La décomposer en un produit de facteurs.
3° Calculer la valeur numérique de y pour :

$$x = 0; \quad x = -3; \quad +3; \quad +2; \quad -\frac{3}{2}; \quad +\sqrt{19}.$$

On pourra, pour chacun de ces calculs, choisir celle des formes de l'expression y qui paraîtra la plus commode.

Réduire en une seule fraction, la plus simple possible :

293. $(x^2-1)\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}-1\right)$; $\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)$.

294. $\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\frac{xy}{x^2+y^2}$.

295. $\dfrac{\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)x^2}{\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+x}\right)}$; $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y+z}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}}\times\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x+z}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x+z}}$.

296. $\frac{a^2-3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-3}{(b-c)(c-a)}+\frac{c^2-3}{(c-a)(c-b)}$.

297. $\dfrac{1}{\left(\frac{a}{b}-1\right)\left(\frac{a}{c}-1\right)}+\dfrac{1}{\left(\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{b}{c}-1\right)}+\dfrac{1}{\left(\frac{c}{a}-1\right)\left(\frac{c}{b}-1\right)}$.

298. $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

299. $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}-\sqrt{x}-\sqrt{x+1}+4$.

300. $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}+\frac{2ab}{a^2-b^2}\right):\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$.

301. $\dfrac{1}{1+\frac{x}{y+z}}+\dfrac{1}{1+\frac{y}{z+x}}+\dfrac{1}{1+\frac{z}{x+y}}$.

302. $\dfrac{\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}}{\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}}$; $\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}:\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$.

* * *

Vérifier les identités :

303. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc\equiv(a+b)(b+c)(c+a)$.

304. $(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)\equiv$
$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$.

305. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)\equiv 3(x+y)(y+z)(z+x)$.

306. — 1° Effectuer la multiplication :
$(x^2+3x+3)(x^2+3)(x^2-3x+3)$.

2° Démontrer que, pour aucune valeur de x, aucun des trois polynomes $x^2 + 3$; $x^2 + 3x + 3$; $x^2 - 3x + 3$ ne peut être nul.

3° Mettre sous la forme d'une fraction unique l'expression :

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 3} - \frac{1}{x^2 + 3x + 3} - \frac{x^2 + 3}{mx^5}.$$

4° En supposant $m = 4 + \frac{2}{3}$, quelles valeurs faut-il attribuer à x pour que y prenne une valeur numérique nulle?

307. — 1° Développer l'expression $(2x + 3y)^2$ et mettre l'expression $4x^2 - 9y^2$ sous la forme d'un produit de deux facteurs.

2° Mettre les expressions $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 16$ et $4x^2 - 9y^2 - 4(2x - 3y)$ sous la forme de produits de deux facteurs.

3° Simplifier la fraction rationnelle :

$$F = \frac{4x^2 + 12xy + 9y^2 - 16}{4x^2 - 9y^2 - 4(2x - 3y)};$$

calculer la valeur numérique de la fraction simplifiée pour :

a) $x = -2$; $y = \frac{1}{3}$, *b*) $x = 3$; $y = 2$, *c*) $x = \sqrt{3}$; $y = -2$.

(B. E. P. C.).

308. — 1° Décomposer en un produit de facteurs chacune des expressions suivantes :

$$A = (x - 5)(3x - 8) + (x - 5)^2 + 2x^2 - 50,$$
$$B = 3x - 15 + x(5 - x).$$

2° Simplifier la fraction $\frac{A}{B}$.

3° Calculer la valeur prise par cette fraction pour : $x = 0$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{2}$.

(B. E. P. C.).

309. — On donne l'expression :

$$A = (3x - 5)(2x - 7) + (3x - 5)(1 - 4x) + 9x^2 - 25.$$

1° Décomposer A en un produit de deux facteurs. On désigne par B l'expression obtenue.

2° Développer A et réduire le polynome obtenu. On désigne par C le polynome réduit.

3° Vérifier que B et C prennent la même valeur numérique pour $x = 2\sqrt{7}$.

(B. E. P. C.).

310. — 1° Compléter l'expression $x^2 - 4x$ pour obtenir le développement du carré d'un binome de la forme $x - a$.

2° Utiliser le résultat précédent pour mettre l'expression $x^2 - 4x - 21$ sous la forme $(x - 7)(x + 3)$.

3° Simplifier l'expression :

$$\frac{x^2 - 4x - 21}{(x-7)^2 - (7-x)(2x+1)}.$$

4° Calculer les valeurs numériques de l'expression précédente pour $x = -3$ et $x = -\frac{2}{7}$.

(B. E. P. C.).

311. — 1° Quel nombre faut-il ajouter au polynome $25x^2 + \frac{5x}{4}$ pour qu'il devienne le carré d'un binome?

2° Mettre sous forme de produit :

$$9(2x-1)^2 - 25(x-3)^2 \quad \text{et} \quad (5-3x)(x-1) - (3x-5)^2.$$

3° Soit la fraction :

$$\frac{A}{B} = \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 2x}.$$

a) Peut-on calculer sa valeur numérique pour toute valeur de x? Justifier la réponse.

b) Simplifier cette fraction.

c) Pour quelle valeur de x la fraction $\frac{A}{B}$ est-elle nulle?

(B. E. P. C.).

312. — Soit l'expression

$$A = (3x-1)^2 - (5x+3)^2.$$

1° La mettre sous forme d'un polynome ordonné.

2° La décomposer en un produit de deux facteurs. Effectuer ce produit et vérifier que l'on retrouve le polynome précédent.

3° Quelle est la valeur numérique de ce polynome pour $x = -\frac{1}{2}$?

4° Simplifier l'expression $y = \frac{A}{-32x - 8}$.

(B. E. P. C.).

313. — 1° Calculer le produit $(X^2 - 9)(X + 1)$ et l'ordonner par rapport à X.

2° Mettre sous la forme d'un produit de facteurs de degré 1 ou 0 chacune des expressions suivantes :

$$A = X^3 + X^2 - 9X - 9,$$
$$B = (X-2)^2 - (X-4)^2.$$

3° Simplifier la fraction $F = \frac{A}{B}$.

4° On pose $X = 2n + 1$. Exprimer la fraction simplifiée en fonction de n. En déduire que, si X est remplacé par un nombre entier impair, la fraction F devient un entier pair. Cas d'exception?

(B. E.).

CHAPITRE IV

THÉORÈME DE THALÈS

I. PARALLÈLES ÉQUIDISTANTES

Travaux pratiques d'initiation.

En utilisant la réglure du cahier tracer quatre droites parallèles et équidistantes : (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), $(\Delta\ )$ (*fig. 11*). Les couper par une droite (X) qui leur est perpendiculaire et par deux autres droites (X′) et (X″) obliques aux droites (Δ) et parallèles entre elles. En utilisant les lettres marquées sur la figure, découvrir des segments égaux, de nouvelles droites parallèles, des parallélogrammes.

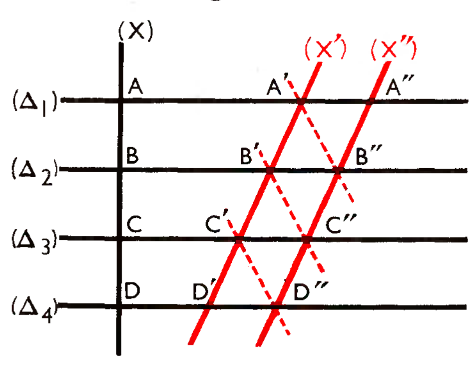
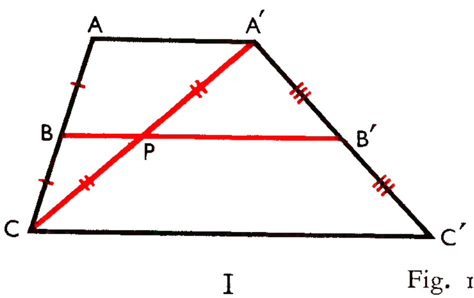
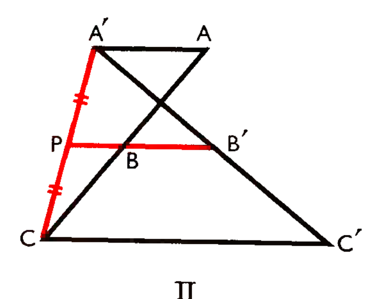


Fig. 11.

80. Rappel d'une propriété d'un trapèze. — Soit un trapèze AA′C′C (convexe ou croisé) de bases AA′ et CC′ (*fig. 12*). Marquons les milieux respectifs B, B′ et P des segments AC, A′C′, A′C. Le segment BP, qui a pour



I



II

Fig. 12.

extrémités les milieux B et P des côtés AC et A′C du triangle ACA′, est parallèle à AA′ (Classe de 4e, n° 236). De même le segment PB′, qui a pour extrémités les milieux P et B′ des côtés A′C et A′C′ du triangle A′CC′, est parallèle à CC′. Or les droites AA′ et CC′ sont parallèles, les droites BP et PB′ sont donc parallèles à AA′ et, comme elles ont le point B en commun, elles sont confondues.

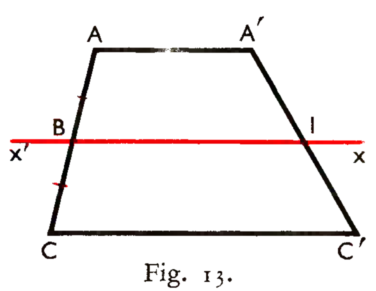


Fig. 13.

■ THÉORÈME. — ***La droite qui passe par les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases.***

Réciproquement, par le milieu B du segment AC, traçons la parallèle $x'Bx$ aux bases. Elle coupe A′C′ en un point I (*fig. 13*). Les droites $x'x$ et BB′, toutes deux parallèles à AA′ et passant par B, sont confondues; les points B′ et I sont donc confondus aussi.

■ THÉORÈME RÉCIPROQUE. — ***La parallèle aux bases d'un trapèze, passant par le milieu d'un des côtés non parallèles, passe par le milieu du côté opposé.***

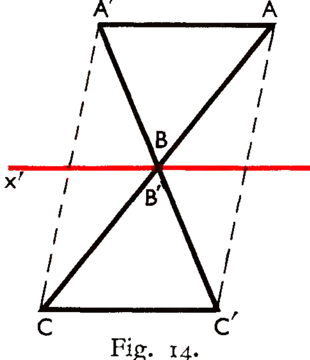


Fig. 14.

● REMARQUE. Il pourrait arriver que les milieux B et B′ soient confondus, le quadrilatère AA′CC′ est alors un parallélogramme (quadrilatère dont les diagonales se coupent en leurs milieux). La droite BB′ n'est plus alors définie; il suffit, dans ce cas, de la remplacer par la droite $x'x$ parallèle à A′A et passant par B (*fig. 14*).

81. Famille de parallèles équidistantes. — La *figure 13* montre trois droites parallèles AA′, $x'x$, CC′ découpant sur deux sécantes des segments consécutifs égaux. On peut généraliser pour un nombre quelconque de droites :

Traçons sur une droite (X) des segments égaux et consécutifs :

$$AB = BC = CD = DE.$$

Par les points A, B, C, D, E traçons des droites parallèles et distinctes de (X), nous obtenons les droites : (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), (Δ_4), (Δ_5). Si une droite (X′), distincte de (X), coupe (Δ_1), elle coupe aussi les autres droites (Δ_2)... (Δ_5).

Appelons A', B', C', D', E' les points d'intersection respectifs de (X') avec (Δ_1), (Δ_2)... (Δ_5) *(fig. 15)*.

L'examen des droites (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), coupées par (X) et par (X'), donne :

$$A'B' = B'C'.$$

L'examen des droites (Δ_2), (Δ_3), (Δ_4), coupées par (X) et par (X'), donne :

$$B'C' = C'D' ;$$

et enfin, l'examen des droites (Δ_3), (Δ_4), (Δ_5) coupées par (X) et par (X') donne :

$$C'D' = D'E'.$$

▪ THÉORÈME. — ***Si des droites parallèles découpent sur une sécante des segments consécutifs égaux, elles découpent des segments consécutifs égaux sur toute autre sécante.***

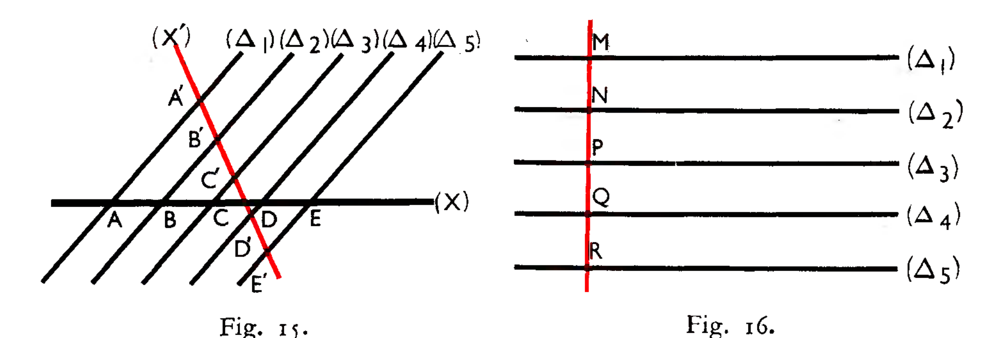


Fig. 15. Fig. 16.

En particulier, de telles droites découpent des segments consécutifs égaux sur une droite qui leur est perpendiculaire : MN = NP = PQ = QR (*fig. 16*). Pour cette raison, on dit que ces droites forment une famille de *droites parallèles équidistantes*, car les mesures des segments MN, NP, PQ... sont les distances de deux parallèles consécutives quelconques.

☆ DÉFINITION. — ***On dit qu'une famille de droites parallèles est une famille de* parallèles équidistantes *pour exprimer que ces droites découpent sur l'une de leurs perpendiculaires communes des segments consécutifs égaux.***

Nous venons d'établir l'équivalence logique suivante :

Les droites (Δ_1), (Δ_2)... (Δ_5) sont des parallèles équidistantes : MN = NP = PQ = QR, ces segments ayant pour support une droite perpendiculaire aux parallèles (Δ_1)... (Δ_5).	$\Longleftrightarrow$	Les droites parallèles (Δ_1), (Δ_2)... (Δ_5) découpent sur toute sécante des segments consécutifs égaux : AB = BC = CD = DE.

82. Applications. — I. *Partager un segment en* n *parties égales.* — Soit à partager le segment AB en 5 parties égales. Traçons une demi-droite quelconque Ax, d'origine A, et dont le support ne contient pas B. Portons sur cette demi-droite, 5 segments consécutifs égaux (*fig. 17*) :

$$Ac = cd = de = ef = fb. \quad (1)$$

Traçons la droite bB et traçons ensuite par A, c, d, e, f les parallèles à bB. Nous obtenons ainsi 6 parallèles. En vertu de (1), ces parallèles sont équidistantes, elles déterminent donc sur AB les segments égaux :

$$AC = CD = DE = EF = FB.$$

Le problème est résolu.

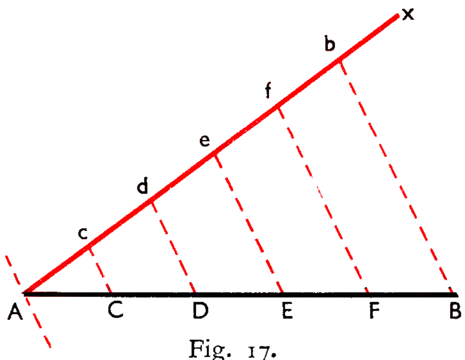


Fig. 17.

• Remarque. Il est inutile, en pratique, de tracer les 5 parallèles à bB. Il suffit de tracer celle qui passe par c (ou par f). On obtient, en effet, alors le point C (ou le point F) et l'on a ainsi déterminé l'un des points de division, d'où l'on déduit les autres.

II. *Connaissant le rapport de deux segments et l'un des segments, construire l'autre.*

Donnons-nous le segment AB et soit à construire un segment MN tel que :

$$\frac{MN}{AB} = \frac{3}{5}.$$

Cela revient à :

$$MN = \frac{3}{5} AB.$$

On partagera donc AB en 5 parties égales et MN sera la somme de trois de ces parties. En se reportant à la *figure 17* on aura donc :

$$MN = AE.$$

• Remarque. *Si le rapport donné est algébrique*, ce qui suppose que les segments appartiennent à une même droite ou à des droites parallèles, il faudra orienter MN dans le même sens que AB ou en sens contraire suivant que le signe du rapport sera + ou —.

EXEMPLE (*fig. 18*) :

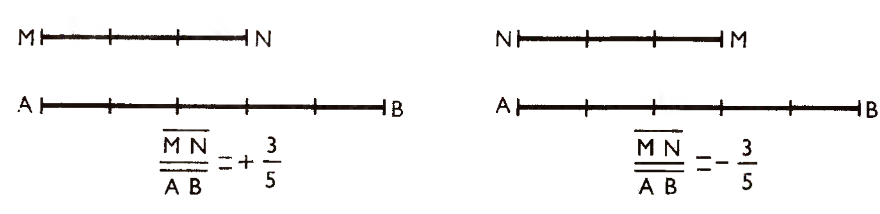


Fig. 18.

● Applications.

314. — *Soit un triangle* ABC, N *le milieu de* AC, M *le milieu de* AB. *On trace la droite* MN. *Quelle autre droite suffit-il de tracer pour obtenir une famille de trois parallèles équidistantes ?*

315. — *Soit un losange* ABCD *dont les diagonales se coupent en* O. *Démontrer que les médiatrices de* OB *et* OD *forment avec le support de la diagonale* AC *une famille de trois parallèles équidistantes. Comment porter à cinq le nombre des parallèles équidistantes ?*

316. — *Soit un trapèze* ABCD, M *et* N *les milieux des bases respectives* AB *et* CD, P *et* Q *les milieux respectifs des côtés* AD *et* BC. *Que dire des droites* BD, MP, NQ?

317. — *1° Soit un triangle* ABC *et la hauteur* AA_1. *Partager* AA_1 *en 3 parties égales (faire la construction et désigner par* R *et* S *les points de* AA_1 *tels que* $AR = RS = SA_1$). *2° Tracer par* A, R *et* S *des parallèles à la droite* BC. *Que dire de ces parallèles ? Tracer la médiane* AM *et démontrer que l'une des parallèles précédentes passe par le centre de gravité* G *du triangle.*

318. — *Tracer un cercle de centre* O *et une droite* (X) *qui passe par* O. *Construire les droites* (D) *et* (D′) *tangentes au cercle et parallèles à* (X). *Que dire des droites* (D), (X) *et* (D′)?

319. — *En se servant des réglures d'un cahier, comment peut-on partager un segment en 5 parties égales ? Est-ce que cette construction est possible quelle que soit la longueur du segment ?*

320. — *On donne un segment* AB *et un point* C, *non situé sur la droite* AB.

1° *Construire le segment* CD *tel que* $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = -\frac{2}{3}$.

2° *Construire le segment* CE *tel que* $\frac{\overline{CE}}{\overline{AB}} = +\frac{3}{5}$.

3° *Calculer le rapport* $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$

II. THÉORÈME DE THALÈS

83. Segments découpés par trois parallèles sur deux sécantes.

Soit trois parallèles (D_1), (D_2), (D_3) qui coupent une sécante xy, respectivement, en A, B, C et une autre sécante $x'y'$ en A′, B′, C′ (*fig. 19*).

Supposons que le rapport $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ *soit égal à* $+\dfrac{2}{3}$. Cela veut dire :

1° que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont le même sens;

2° que, si on partage BC en trois parties égales, AB est la somme de deux de ces parties.

Si, par tous les points de division ainsi obtenus, on trace des parallèles à BB′, ces parallèles, qui découpent sur xy des segments consécutifs égaux, découpent aussi sur $x'y'$ des segments consécutifs égaux. Par suite, B′C′ est partagé en trois parties égales et A′B′ est la somme de deux de ces parties. En outre, $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont de même sens puisque B′ est situé entre A′ et C′.

On a donc : $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = +\dfrac{2}{3}$, et, par suite : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Fig. 19.

Fig. 20.

Si $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *sont de sens contraires,* $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont aussi de sens contraires et l'on a encore (*fig. 20*) :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}},$$

chaque rapport ayant pour valeur $-\dfrac{2}{3}$.

Cette démonstration, faite sur un exemple numérique, est valable pour toute autre valeur du rapport. Nous admettons que le résultat obtenu subsiste si les segments sont incommensurables entre eux.

Nous énoncerons le théorème suivant, connu sous le nom de Théorème de THALÈS[1] :

▪ THÉORÈME DE THALÈS. — ***Si trois droites parallèles*** (D_1), (D_2), (D_3) ***coupent une droite respectivement en A, B, C et coupent une autre droite en A′, B′, C′, le rapport*** $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ ***est égal au rapport*** $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

L'égalité (1) : $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ est une proportion.

Si on l'écrit seulement en valeur absolue, on obtient :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

ou, en permutant les moyens :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}. \qquad (2)$$

Les mesures des segments AB *et* BC *sont proportionnelles aux mesures des segments* A′B′ *et* B′C′.

• REMARQUES. — I. Les égalités (1) et (2) expriment donc l'égalité de rapports de segments (orientés ou non) au moyen de l'égalité des quotients de leurs mesures avec une certaine unité. Nous supposons, pour éviter toute confusion, que l'*unité est la même pour toutes les mesures.*

II. On peut écrire aussi (1) sous la forme :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'C'}}; \qquad (3)$$

mais on se gardera bien de permuter les moyens (ou les extrêmes) et d'écrire :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A'B'}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{B'C'}},$$

car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ n'ont pas, en général, de supports parallèles et nous n'avons pas défini le rapport de deux vecteurs dont les supports n'ont pas la même direction.

1. THALÈS DE MILET, philosophe et géomètre grec, l'un des sages de la Grèce (600 av. J.-C.).

III. Nous avons écrit la proportion :

$$(1) \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

On aurait pu établir, par un raisonnement analogue la proportion :

$$(4) \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

$$\left(\textit{fig. 19} : \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = +\frac{2}{5}, \ \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = +\frac{2}{5}; \quad \textit{fig. 20} : \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = -2, \ \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = -2\right).$$

Au surplus, on peut démontrer directement que (4) résulte de (1) en utilisant les propriétés connues des proportions. De (1) on déduit, en effet :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB} + \overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'B'} + \overline{B'C'}}, \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 46),$$

c'est-à-dire, en appliquant la formule de Chasles aux dénominateurs :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

Le théorème énoncé permet d'écrire aussi bien l'égalité (1) que l'égalité (4).

Fig. 21.

84. Généralisation. — La *figure 21* montre une droite *xy* portant les points A, B, C, D, E, F. Par ces points, on a tracé des parallèles (Δ_1)... (Δ_6) de direction quelconque que l'on a coupées par une droite $x'y'$, d'où les points A′, B′, C′, D′, E′, F′.

D'après ce qui précède (relation 2), on a :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}, \qquad \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} \qquad \text{etc...}$$

Il en résulte donc que :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'}. \qquad (5)$$

Les points A et A′, l'un sur xy, l'autre sur $x'y'$, et situés sur la même droite (Δ_1) sont dits *points correspondants*; de même B et B′ sont correspondants, etc..

Deux segments tels que AB et A′B′ (ou BE et B′E′), l'un de xy, l'autre de $x'y'$, limités aux mêmes parallèles, sont dits *segments correspondants.*

▪ THÉORÈME. — ***Si des parallèles sont coupées par deux sécantes, les mesures des segments d'une sécante sont proportionnelles aux mesures des segments correspondants de l'autre.***

EXEMPLE. Si $AB = \frac{3}{4} A'B'$, on a aussi :

$$BC = \frac{3}{4} B'C'; \qquad CD = \frac{3}{4} C'D'; \qquad AC = \frac{3}{4} A'C', \text{ etc.}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{AF}{A'F'} = \frac{CE}{C'E'} = \frac{3}{4}.$$

● **Applications.**

Utiliser la *figure 22*, sur laquelle les carrés ABCD et DEFG ont respectivement pour côtés 1,5 cm et 2 cm, pour résoudre les exercices suivants :

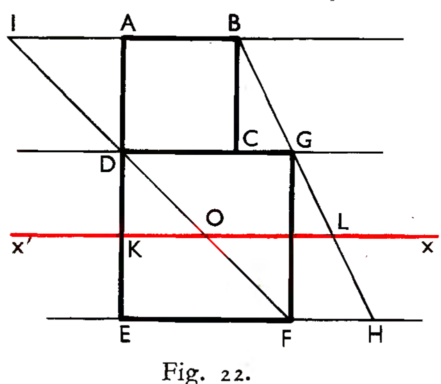


Fig. 22.

321. — *Calculer la valeur de chacun des rapports suivants :*

$$\frac{AD}{DE}, \quad \frac{DE}{EA}, \quad \frac{AB}{DG}, \quad \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AE}}, \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{GC}}.$$

322. — *Compléter les proportions suivantes à l'aide du théorème de Thalès :*

$$\frac{GB}{GH} = \frac{AD}{\ldots}, \quad \frac{\overline{BG}}{\ldots} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}, \quad \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{DE}} = \frac{\ldots}{\overrightarrow{GH}},$$

$$\frac{\overrightarrow{ID}}{\ldots} = \frac{\overrightarrow{BG}}{\overrightarrow{GH}}, \quad \frac{AE}{\ldots} = \frac{DE}{GH}, \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{IF}} = \frac{\overline{DI}}{\ldots}.$$

323. — *En désignant par* x′x *la médiatrice des côtés* DE *et* FG, *qui coupe* DE *en* K, DF *en* O *et* BH *en* L, *compléter les suites de proportions :*

$$\frac{DA}{\ldots} = \frac{AK}{IO} = \frac{\ldots}{OF} = \frac{EA}{\ldots} = \frac{\ldots}{DO} = \frac{\ldots}{FD};$$

$$\frac{BG}{\ldots} = \frac{\ldots}{OF} = \frac{BL}{IO} = \frac{\ldots}{ID} = \frac{HB}{\ldots} = \frac{GL}{\ldots}.$$

III. APPLICATIONS AU TRIANGLE ET AU TRAPÈZE

Travaux pratiques d'initiation.

1° Dessiner un triangle ABC dans lequel AB = 60 mm, AC = 90 mm. Marquer sur AB le point M tel que AM = 24 mm. Tracer par M la parallèle à BC qui coupe AC en N et par A la parallèle à BC. Utiliser le théorème de Thalès pour évaluer le rapport $\frac{AN}{AC}$ et en déduire la mesure de AN.

2° Dessiner un trapèze ABCD dont les bases sont AB et DC et dont les côtés non parallèles ont pour mesures respectives : AD = 40 mm et BC = 60 mm. Marquer sur le côté AD un point M tel que AM = 12 mm et tracer par M la parallèle aux bases qui coupe BC en N. Trouver la valeur du rapport $\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}$.

85. Application du théorème de Thalès au triangle. — Coupons un triangle ABC par une droite (X) parallèle au support du côté BC et ne passant pas par A (*fig. 23*).

Trois cas de figure sont possibles suivant que cette parallèle coupe les côtés AB et AC (*fig. I*) ou qu'elle coupe leurs supports soit au-delà de A (*fig. II*) soit au-delà de B et de C (*fig. III*).

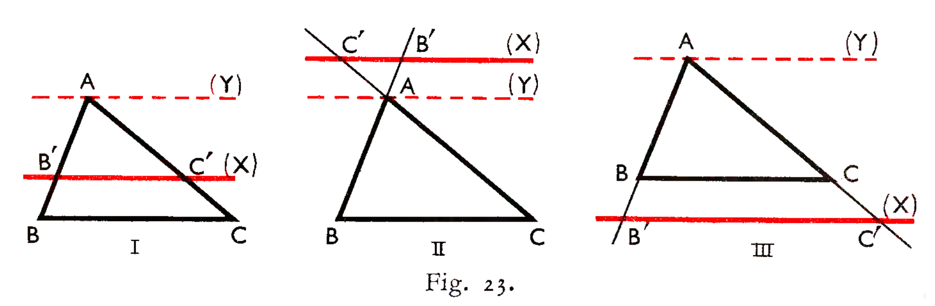


Fig. 23.

Dans tous les cas, complétons chacune des figures par la parallèle (Y) à BC et passant par A. Nous retrouvons trois droites parallèles coupées par deux sécantes et, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}. \qquad (1)$$

D'où le théorème :

▪ THÉORÈME. — ***Toute parallèle au support du côté BC d'un triangle ABC coupe les supports des côtés AB et AC respectivement en des points B′ et C′ tels que :***

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}.$$

● REMARQUE. On peut écrire aussi :

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{CC'}} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{B'B}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{C'C}}, \text{ etc...}$$

Naturellement les égalités précédentes ont également lieu sous forme arithmétique :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}; \qquad \frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'}; \qquad \frac{AB}{B'B} = \frac{AC}{C'C}, \text{ etc.}$$

86. Réciproque. — Soit un triangle ABC. Prenons sur le support de AB un point B′ distinct de A et sur le support de AC un point C′ distinct de A tels que :

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}. \tag{2}$$

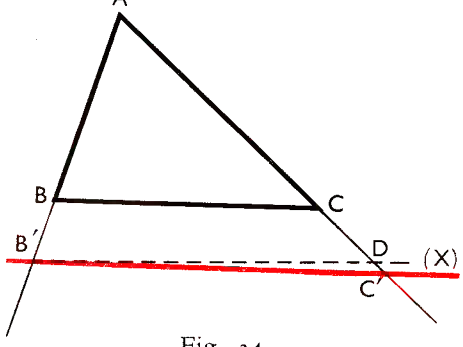


Fig. 24.

Traçons par B′ la parallèle au support de BC. Elle coupe le support de AC en un point D et l'on a (théorème direct) (*fig. 24*) :

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}. \tag{3}$$

En comparant (2) et (3), on en déduit :

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}. \tag{4}$$

Il en résulte que : $\overline{AC'} = \overline{AD}$.

Or les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont même support et même origine. Comme ils ont la même mesure algébrique, leurs extrémités C′ et D sont confondues. Par suite les segments B′C′ et B′D sont confondus et la droite B′C′ est parallèle à BC.

▪ THÉORÈME RÉCIPROQUE. — ***Si une droite coupe les supports de deux côtés AB et AC d'un triangle ABC respectivement en deux points distincts B′ et C′ tels que :***

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$$

cette droite est parallèle au support du côté BC.

● REMARQUES. — I. Comme nous l'avons déjà dit, si l'on a :

$$\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'B}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'C}}, \qquad (5)$$

la droite B′C′ est encore parallèle à BC puisque les relations (5) et (2) sont logiquement équivalentes.

II. Il importe de noter que les rapports utilisés sont des *rapports algébriques;* sur la *figure 25* on a :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{1}{4},$$

mais $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}$ est positif; $\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$ est négatif.

La droite B′C′ n'est pas parallèle à BC.

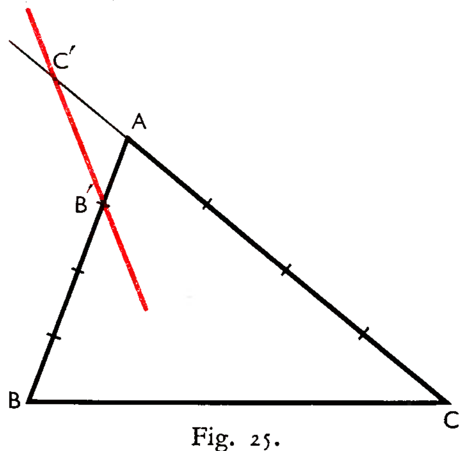


Fig. 25.

III. La réciproque précédente fournit un nouveau moyen pour reconnaître que deux droites sont parallèles.

87. Application du théorème de Thalès au trapèze. — Soit un trapèze ABCD (convexe ou croisé) de bases AB et CD (*fig. 26*).

Une droite parallèle aux bases coupe les supports des côtés non parallèles AD et BC respectivement en M et N. On obtient ainsi trois parallèles coupées par les sécantes AD et BC[1].

On peut donc écrire :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BC}} \qquad (1)$$

et aussi : $$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \qquad (2)$$

ainsi que d'autres proportions équivalentes.

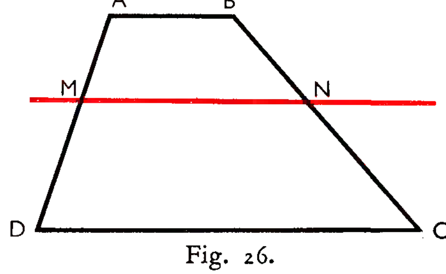


Fig. 26.

1. Il y a, comme pour le triangle, 3 cas de figure suivant que MN coupe les côtés AD et BC ou leurs supports. L'élève fera les 3 figures dans chaque cas (trapèze convexe ou croisé).

▪ THÉORÈME. — ***Si une droite parallèle aux bases AB et CD d'un trapèze ABCD coupe les supports des côtés AD et BC non parallèles, respectivement en M et N, on a la proportion :***

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}.$$

● Remarques. On peut écrire aussi des proportions entre mesures arithmétiques. Par exemple :

$$\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}; \qquad \frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}; \qquad \frac{MD}{AD} = \frac{NC}{BC}.$$

88. Réciproque. — Soit un trapèze ABCD de bases AB et CD. Supposons qu'une droite (X) coupe les supports des côtés non parallèles AD et BC respectivement en M et N tels que :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}. \qquad (2)$$

Traçons par M la parallèle (Y) aux bases. Elle coupe le support de BC en P et l'on a (théorème direct) (*fig. 27*) :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}. \qquad (3)$$

De la comparaison de (2) et (3) il résulte :

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}. \qquad (4)$$

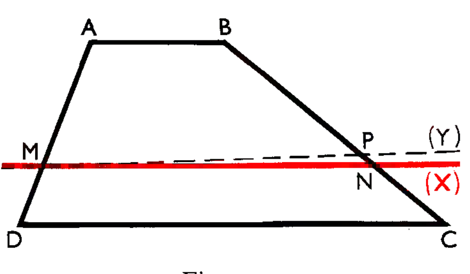


Fig. 27.

De la proportion (4) on déduit, par une transformation connue :

$$\frac{\overline{NB} - \overline{NC}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{PB} - \overline{PC}}{\overline{PC}},$$

c'est-à-dire (formule de Chasles) :

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{PC}},$$

d'où il résulte :

$$\overline{NC} = \overline{PC}.$$

On en conclut, comme pour le cas du triangle (n° 86), que N et P sont confondus. Par suite la droite (X) est confondue avec (Y), elle est donc parallèle aux bases.

■ THÉORÈME RÉCIPROQUE. — ***Si une droite coupe les supports des deux côtés non parallèles AD et BC d'un trapèze ABCD, de bases AB et CD, en des points respectifs M et N tels que :***

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}},$$

cette droite est parallèle aux bases.

89. Double application du théorème de Thalès au triangle. — Soit un triangle ABC. Traçons une droite (X) parallèle au support de BC.

La droite (X) coupe les supports de AB et AC respectivement en B′ et en C′ (*fig. 28*).

En appliquant le théorème de Thalès (n° 85) au triangle ABC coupé par (X) nous obtenons :

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}. \qquad (1)$$

Traçons par C′ la parallèle (Y) au support de AB. La droite (Y) coupe le support de BC en M. En appliquant le théorème de Thalès au triangle CAB coupé par la parallèle (Y) à la droite AB, nous avons :

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}. \qquad (2)$$

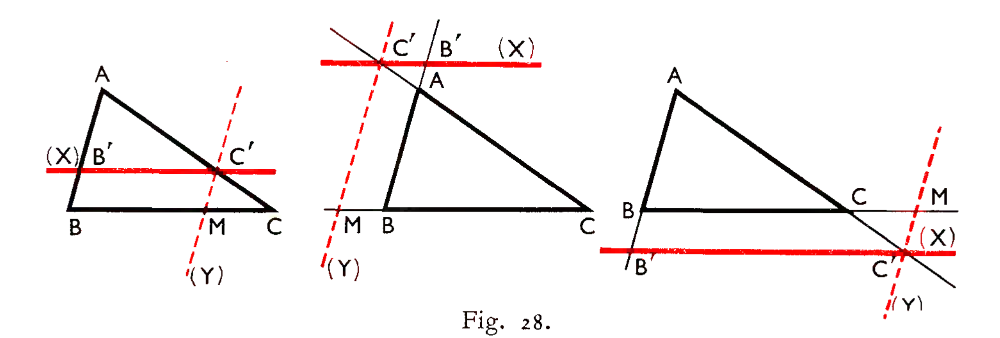


Fig. 28.

Comme le quadrilatère B′C′MB est un parallélogramme, les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont égaux, parallèles et de même sens; d'où :

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}. \quad (3)$$

En tenant compte de (3), la proportion (2) devient :

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}. \quad (4)$$

En rassemblant (1) et (4), nous obtenons :

$$\boxed{\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}} \quad (5)$$

▪ THÉORÈME. — ***Si B′ et C′ sont les points de rencontre respectifs des supports des côtés AB et AC d'un triangle ABC avec une droite parallèle au support du côté BC, on a les égalités :***

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}.$$

● REMARQUES. — I. Si la droite (X) passe par A, les points B′ et C′ sont confondus avec A et les égalités (5) sont évidentes puisque les rapports écrits sont tous nuls.

II. Si l'on ne tient compte que des valeurs arithmétiques, on écrira :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \quad (6)$$

et l'on dira que les segments AB′, AC′, B′C′ sont proportionnels aux segments AB, AC, BC.

▪ ***Toute parallèle au support de l'un des côtés d'un triangle forme avec les supports des deux autres côtés un nouveau triangle dont les côtés sont proportionnels à ceux du premier.***

EXEMPLE. Dans un triangle ABC on a : BC = 60; AC = 40; AB = 24 (mesures en mm). Par le point B′ du segment AB tel que AB′ = 18, on trace B′C′ parallèle à BC jusqu'en C′ sur AC. Calculer AC′ et B′C′ (*fig. 29*).

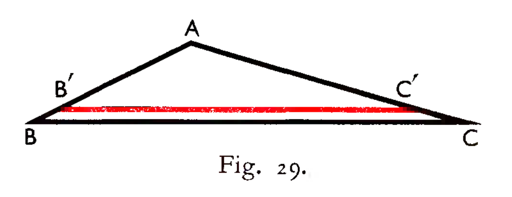


Fig. 29.

Les égalités (6) fournissent :

$$\frac{18}{24} = \frac{AC'}{40} = \frac{B'C'}{60};$$

d'où : $AC' = \dfrac{18 \times 40}{24} = 30,$

$$B'C' = \frac{18 \times 60}{24} = 45.$$

• Applications.

324. — *Tracer un triangle* ABC *dans lequel* AB = 75 *mm*, BC = 60 *mm. Placer sur le côté* AB *le point* M *tel que* AM = 50 *mm et tracer par* M *la parallèle à* AC, *qui coupe* BC *en* N. *Calculer les longueurs des segments* BN *et* NC.

325. — *Tracer un triangle* ABC *dans lequel* BC = 45 *mm*, CA = 33*mm et placer sur les prolongements de* BC *et* AC *(au delà de* C*) les points respectifs* P *et* R *tels que* CP = 15 *mm*, CR = 11 *mm. Comparer les rapports* $\frac{\overline{CP}}{\overline{CB}}$ *et* $\frac{\overline{CR}}{\overline{CA}}$. *Que peut-on en conclure pour les droites* AB *et* PR?

326. — *Soit un trapèze* ABCD *dont les bases sont* AB *et* CD *et dont les côtés non parallèles* AD *et* BC *mesurent respectivement* 35 *mm et* 42 *mm. On place sur les droites* AD *et* BC *respectivement les points* M *et* N *tels que* AM = 10 *mm*, BN = 12 *mm. Donner les quatre cas de figure possibles. Préciser à chaque fois pourquoi* MN *est parallèle ou non aux bases.*

327. — *Dessiner un triangle* ABC *tel que* AB = 49 *mm*, BC = 35 *mm*, AC = 42 *mm. Placer sur le côté* AB *un point* A′ *tel que* BA′ = 14 *mm et tracer par* A′ *la parallèle à* AC, *qui coupe* BC *en* C′. *Calculer* BC′ *et* A′C′.

328. — *Soit un triangle* ABC *et une parallèle à* BC *qui coupe les prolongements de* BA *et* CA *en* B′ *et* C′ *respectivement. Calculer* B′C′ *quand :*
1° AC = 3,2 cm, AC′ = 0,8 cm, BC = 7 cm;
2° BC = 15 mm, AC = 12 mm, CC′ = 15 mm.

EXERCICES DE REVISION

On trouvera ci-dessous des exercices de Géométrie portant sur le programme de la classe de QUATRIÈME.

329. — 1° Construire un triangle ABC sachant que :

AB = 5 cm; BC = 8 cm; AC = 4 cm.

Construire le centre J du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{B}$. Ce cercle touche la droite BC en U. Calculer CU.

2° Construire le centre K du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{C}$. Ce cercle touche la droite BC en V. Calculer BV. En déduire la mesure du segment UV.

3° Vérifier que UV = AB + AC. Montrer que cette relation est générale.

(¶ Désigner le périmètre par $2p$ *et utiliser les formules établies dans le cours qui permettent d'évaluer* BU *et* BV.*)*

330. — 1° Construire un triangle ABC rectangle en A.

Tracer le cercle inscrit de centre I, il touche AB en B′ et AC en C′. Quelle est la nature du quadrilatère AC′IB′?

Calculer le rayon r du cercle inscrit connaissant le périmètre $2p$ du triangle et la mesure de l'hypoténuse BC = a.

2° Tracer le cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$. Calculer son rayon r' et démontrer que :

$$r' - r = a.$$

331. — Dans un triangle rectangle ABC, on suppose que le côté AB est la moitié de l'hypoténuse BC.

1° Calculer les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

2° On projette A en H sur BC. Démontrer que : HC = 3 BH.

332. — On suppose que, dans un triangle ABC, on a : AB > AC. On trace la médiane AM (M milieu de BC) et la médiatrice $x'Mx$ du segment BC.

1° Dans quelle région du plan limitée par $x'Mx$ se trouve le point A?

2° En déduire que l'un des deux angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AMC}$ est aigu et que l'autre est obtus.

333. — On donne une droite (D) et deux points A et B de part et d'autre de (D). La droite AB coupe (D) en O. Soit M un point de (D) autre que O.

1° Démontrer que : MA + MB > OA + OB.

2° Où faut-il prendre N sur (D) pour que la somme NA + NB soit la plus petite possible?

334. — On donne une droite (D) et deux points A et B d'un même côté de (D). Où faut-il prendre un point M sur (D) pour que la somme MA + MB soit la plus petite possible?

(¶ *Utiliser le point* B′ *symétrique de* B *par rapport à* (D) *et se ramener à l'exercice précédent. Démontrer que l'on obtient le même point* M *si on utilise le symétrique* A′ *de* A *par rapport à* (D).)

335. — On donne une droite (D) et deux points A et B d'un même côté de (D). On suppose que les droites AB et (D) se coupent en O tel que B soit entre O et A. Soit M un point de (D) autre que O.

1° Démontrer que :

$$MA - MB < OA - OB \quad (\text{si } MA \geqslant MB)$$
$$MB - MA < OA - OB \quad (\text{si } MA \leqslant MB)$$

2° Où faut-il prendre un point N sur (D) pour que la différence des distances de N aux points A et B soit la plus grande possible?

336. — On donne une droite (D) et deux points A et B de part et d'autre de (D). Où faut-il prendre un point M sur (D) pour que la différence des distances de N aux points A et B soit la plus grande possible?

(¶ *Utiliser le symétrique* B′ *de* B *(ou* A′ *de* A) *par rapport à* (D) *et se ramener à l'exercice précédent. On admettra que les droites* AB′ *et* (D) *sont sécantes*).

337. — 1° ABCD est un parallélogramme. On trace par A une droite (L) qui laisse les points B, C, D d'un même côté. On projette B, C, D en B′, C′, D′ sur (L). Soit (Y) la parallèle à (L) tracée par B. Les droites CC′ et (Y) se coupent en F.

Démontrer que les triangles DD′A et CFB sont égaux.

2° En déduire que : CC′ = BB′ + DD′.

3° Quelle relation existe-t-il entre CC′, BB′ et DD′ si (L) coupe le segment BC?

338. — Deux demi-droites Ax et By sont parallèles et de même sens. On prend un point M sur Ax et un point N sur By de façon que la somme AM + BN soit égale à une longueur donnée a. Soit P le milieu de AB et O le milieu de MN.

1° Démontrer que PO est parallèle à Ax et que : $PO = \frac{a}{2}\cdot$

2° En déduire que, lorsque M se déplace sur Ax, la droite MN passe par un point fixe.

3° Quelles positions extrêmes peuvent prendre les points M et N?

339. — Deux demi-droites Ax et By sont parallèles et de sens contraires. On prend un point M sur Ax et un point N sur By de façon que la différence AM — BN soit égale à une longueur donnée a. Soit P le milieu de AB et O le milieu de MN.

1° Démontrer que PO est parallèle à Ax et que : $PO = \frac{a}{2}\cdot$

2° En déduire que, lorsque M se déplace sur Ax, la droite MN passe par un point fixe. Étudier le cas particulier où $a = 0$.

3° Quelles positions extrêmes peuvent prendre les points M et N?

340. — 1° Tracer un cercle (O) de centre O et passant par un point donné A. Soit (C) un cercle tangent en A au cercle (O). La tangente à (C) en un point M rencontre en I la tangente en A au cercle (O). Démontrer que l'on a IA = IM.

2° Étant donné un cercle (O), un point A de ce cercle et une droite (D) extérieure au cercle (O), construire les cercles tangents en A à (O) et tangents à (D). Nombre de solutions?

(¶ *On commencera par déterminer les points de contact* M *de ces cercles avec* (D), *en utilisant le point* I *où la tangente en* A *à* (O) *coupe* (D).)

Étudier le cas particulier où (D) est perpendiculaire à OA.

341. — 1° Soit (D) un diamètre d'un cercle de centre O et de rayon R. D'un côté de ce diamètre, on trace deux rayons perpendiculaires OA et OB. On projette A en A′ sur (D) et B en B′ sur (D). Démontrer que les triangles OAA′ et OBB′ sont égaux et en déduire que les cercles inscrits de ces deux triangles sont égaux.

2° Le cercle inscrit dans le triangle OAA′ a pour centre I et il touche (D) en I′; le cercle inscrit dans le triangle OBB′ a pour centre J et il touche (D) en J′. Démontrer que : I′J′ = R.

3° Soit H le milieu de A′B′ et K le milieu de AB. Démontrer que la droite HK est perpendiculaire à (D) et que : $KH = \frac{A'B'}{2}$

En déduire que les points : A′, I et K sont alignés ainsi que les points B′, J et K.

4° Les droites HK et IJ se coupent en P. Démontrer que l'angle $\widehat{IKJ}$ est droit et que : $PK = \frac{R}{2}\cdot$

EXERCICES ET PROBLÈMES

★

342. — On donne deux droites xy, $x'y'$. Elles sont coupées par 4 droites parallèles qui déterminent sur xy les segments consécutifs AB, BC et CD et sur $x'y'$ les segments consécutifs A'B', B'C' et C'D'. On a :

$$AB = 72 \text{ mm}, \quad BC = 48 \text{ mm}, \quad A'B' = 48 \text{ mm}, \quad C'D' = 54 \text{ mm}.$$

Calculer B'C' et CD.

343. — Trois droites parallèles (X), (Y), (Z) sont coupées par deux sécantes (D) et (D') aux points consécutifs A, B, C et A', B', C' respectivement. Calculer B'C' avec les données suivantes :

1° $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{3}{4}$ et $A'B' = 20$ mm.

2° $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm et $A'B' = 6$ cm.

344. — Quatre droites parallèles (X), (Y), (Z), (T) sont coupées par une sécante (D) aux points consécutifs M, N, P, Q respectivement, avec $MN = 3$ cm, $NP = 5$ cm, $PQ = 2$ cm. Une autre sécante (D') coupe les mêmes parallèles respectivement en M', N', P', Q', avec $M'N' = 4{,}5$ cm. Calculer N'P' et P'Q'.

345. — Soit un triangle ABC dont les côtés ont pour mesures : $BC = 48$ mm; $AC = 36$ mm; $AB = 64$ mm. Une droite parallèle au support de BC coupe le support de AB en B' et le support de AC en C'. Calculer les côtés du triangle AB'C' dans chacun des cas suivants :

1° $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \dfrac{3}{4}$; 2° $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \dfrac{5}{4}$; 3° $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = -\dfrac{1}{2}$.

346. — Un triangle ABC a pour côtés : $AB = 15$ cm; $BC = 18$ cm; $CA = 21$ cm. Par le point M placé sur le côté AB, à 6 cm de A, on trace la parallèle à AC, qui coupe BC en N; par N on trace la parallèle à AB, qui coupe AC en P. Calculer les côtés du triangle NPC.

347. — Soit un triangle ABC dont les côtés ont pour mesures $BC = 36$ mm, $AC = 30$ mm, $AB = 24$ mm. Par le point M du segment AB tel que $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = 0{,}6$, on trace la parallèle à BC, qui coupe AC en P, puis par P la parallèle à AB, qui coupe BC en Q. Calculer le périmètre du parallélogramme MPQB.

348. — Dans un triangle ABC, les médianes AA', BB', CC' sont concourantes en G.

1° Évaluer les rapports : $\dfrac{\overline{GA}}{\overline{GA'}}$, $\dfrac{\overline{GB}}{\overline{GB'}}$, $\dfrac{\overline{GC}}{\overline{GC'}}$; $\dfrac{\overline{GA}}{\overline{AA'}}$, $\dfrac{\overline{GB}}{\overline{BB'}}$, $\dfrac{\overline{GC}}{\overline{CC'}}$.

2° On trace par G les parallèles à AB et à AC qui coupent BC respectivement en M et N. Évaluer les rapports : $\dfrac{\overline{MC}}{\overline{BA'}}$ et $\dfrac{\overline{NC}}{\overline{CA'}}$. Préciser la disposition des points B, M, N, C.

349. — Sur les côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère ABCD, on place respectivement les points M, N, P, Q tels que :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AD}} = \frac{2}{5}.$$

1° Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

2° Quelles particularités doit présenter le quadrilatère ABCD pour que MNPQ soit : un rectangle; un losange; un carré?



350. — Soit B′ et C′ les pieds respectifs des hauteurs relatives aux côtés AC et AB d'un triangle ABC. On projette B′ en B″ sur le support de AB et on projette C′ en C″ sur le support de AC.

1° Trouver des rapports égaux aux rapports $\frac{\overline{AB''}}{\overline{AC'}}$ et $\frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}}$.

2° En utilisant les résultats du 1°, comparer les directions des droites BC et B″C″.

351. — 1° Sur le côté AB d'un triangle ABC, on place un point M tel que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3}$.

On trace un vecteur $\overrightarrow{MN}$ tel que : $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Démontrer que les points A, N, C sont alignés. (¶ *On pourra supposer que* MN *coupe* AC *en* N′ *et montrer que* $\overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{MN}$.)

2° Reprendre la même question en supposant que M′ est sur le support de AB, tel que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = -\frac{2}{3}$, et que : $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

352. — 1° Construire un trapèze convexe connaissant les longueurs des bases : AB = 45 mm, CD = 72 mm, et des côtés non parallèles : BC = 35 mm, DA = 40 mm. (¶ *Décomposer le trapèze en un parallélogramme et en un triangle.*)

2° En désignant par M le point d'intersection des supports des côtés non parallèles, calculer les côtés du triangle MAB.

353. — Soit M le milieu du côté BC d'un triangle ABC. Une droite (X) parallèle au support du côté BC coupe les droites AB, AM, AC respectivement en B′, M′, C′.

1° Démontrer que : $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'M'}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AM'}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{M'C'}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$.

2° En déduire que M′ est le milieu de B′C′.

354. — Une droite, parallèle aux bases d'un trapèze ABCD, coupe les côtés non parallèles AD et BC en M et N respectivement, et les diagonales AC et BD en P et Q respectivement.

1° Trouver deux rapports égaux à $\frac{MP}{CD}$ et à $\frac{NQ}{CD}$. En déduire une propriété des segments MP et NQ. Que devient cette propriété si la droite MN passe par le point I commun aux diagonales AC et BD?

2° Soit K le point d'intersection des supports de AD et BC. La droite IK coupe AB en E et CD en F. Étudier la position de E sur AB et celle de F sur CD.

355. — 1° Soit O le milieu de la médiane AM d'un triangle ABC. La droite BO coupe AC en B'. Évaluer le rapport $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}}$. (¶ *Tracer par* M *la parallèle à* BO.)

2° Soit C' le point du segment AB tel que $\frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3}$. Démontrer que les droites AM, BB', CC' sont concourantes.

356. — Soit un triangle ABC et un carré BCMN tels que le triangle et le carré soient de part et d'autre de la droite BC. Les segments AM et AN coupent BC en M' et N' respectivement. Les parallèles à CM et BN passant par M' et N' coupent respectivement AC en P et AB en Q.

1° Démontrer que : $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM'}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AN'}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}}$.

2° En déduire que PQ est parallèle à BC et que le quadrilatère PQN'M' est un carré.

357. — Deux cercles (O) et (O') ont pour centres respectifs O et O' et pour rayons respectifs R et R'; ils sont tangents extérieurement en A. Une droite (X) passant par A coupe ces cercles en B et C respectivement. La perpendiculaire en A à (X) coupe le cercle (O) en B' et le cercle (O') en C'.

1° Montrer que B et B' sont diamétralement opposés sur le cercle (O) et qu'il en est de même pour C et C' sur le cercle (O').

2° Comparer les angles $\widehat{OAB'}$ et $\widehat{O'AC'}$, puis les angles $\widehat{OB'A}$ et $\widehat{O'C'A}$. Que dire des droites BB' et CC'?

3° Comparer les rapports $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ et $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$ au rapport $\frac{R}{R'}$.

★ ★ ★

358. — Soit un losange ABCD; sur les côtés AB et CD on place respectivement les points E et F tels que : $\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CD} = \frac{1}{3}$.

1° Démontrer que EF coupe BD en son milieu.

2° La droite EF coupe les droites AD et BC en I et K respectivement. Démontrer que EI = EF = FK.

3° Démontrer que le triangle DBI est rectangle.

(B. E. P. C.).

359. — Soit un triangle équilatéral ABC de côté a; on prolonge le côté BC d'un segment CD de longueur $2a$. Une demi-droite d'origine D coupe les côtés AB et AC en E et F respectivement. On pose BE $= x$ et CF $= y$. On trace par C la parallèle à AB, qui coupe DE en G.

1° Démontrer que : $\mathrm{CG} = \frac{2}{3}x$.

2° En comparant les triangles AEF et CFG, établir la relation :

(1) $$2ax - 3ay + xy = 0.$$

3° Utiliser la relation (1) pour calculer y lorsque $x = \frac{a}{2}\cdot$

360. — Soit un carré ABCD de côté a; on prolonge le côté CD d'un segment DE de longueur a. Une demi-droite Eu, d'origine E, coupe les côtés AD et BC en M et N respectivement. On pose DM $= x$, CN $= y$.

1° Démontrer que le rapport $\frac{y}{x}$ est indépendant de la position de la demi-droite Eu. En déduire la plus grande valeur possible de x.

2° Déterminer x de manière que DM = BN.

3° La demi-droite Eu coupe le prolongement du côté AB en P. Exprimer le rapport $\frac{\overline{\mathrm{PA}}}{\overline{\mathrm{PB}}}$ en fonction de a et x seulement, et calculer sa valeur numérique pour :

$$x = \frac{a}{6}, \qquad x = \frac{a}{4}, \qquad x = \frac{a}{3}, \qquad x = \frac{a}{2}\cdot$$

Pouvait-on prévoir les deux derniers résultats?

361. — On trace la médiane AA′ d'un triangle ABC. Par un point M du côté BC on trace la parallèle à AA′ qui coupe les supports de AC et de AB respectivement en N et P. Démontrer les relations :

1° $$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}} = \frac{\mathrm{A'B}}{\mathrm{A'M}}; \quad \frac{\mathrm{A'C}}{\mathrm{A'M}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AN}}; \quad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AN}}.$$

2° $$\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{AA'}} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CA'}}; \quad \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{AA'}} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BA'}}.$$

3° $$\mathrm{MN} + \mathrm{MP} = 2\,\mathrm{AA'}.$$

CHAPITRE V

COORDONNÉES

I. REPÉRAGE D'UN POINT DANS UN PLAN

Travaux pratiques d'initiation.

1° Qu'est-ce qu'un axe? Comment, au moyen d'un nombre relatif, peut-on préciser la position d'un point sur un axe? Qu'appelle-t-on abscisse d'un point sur un axe?

2° Marquer un point M sur une feuille de papier, puis tracer deux droites perpendiculaires $x'x$, $y'y$ se coupant en un point O et dont aucune ne passe par M.
Remarquer que M se trouve dans l'un des 4 angles droits de la figure. Il se projette sur $x'x$ en P et sur $y'y$ en Q. Évaluer, en utilisant un double-décimètre les mesures des segments OP et OQ.
Inversement, connaissant les mesures de ces segments OP et OQ, peut-on préciser la position du point M, si l'on sait, en outre dans quel angle droit il se trouve? (Par exemple, M est dans l'angle $\widehat{x'Oy}$ à 4 cm de $y'y$ et à 2 cm de $x'x$.)

3° Si l'on oriente $x'x$ et $y'y$ pour en faire des axes, ne peut-on pas trouver deux nombres relatifs permettant de préciser la position de M sans qu'il soit nécessaire de préciser dans quel angle est M? Marquer les points qui correspondent aux nombres $+2$ et $+5$; -3 et $+4$; -2 et -3; $+4$ et -2 (unité de longueur : cm).
Quelle précaution faut-il prendre pour que le point qui correspond aux nombres -2 et $+4$ ne soit pas le même que celui qui correspond aux nombres $+4$ et -2?

4° Dans le cas où l'un des axes passe par M, que peut-on dire de l'un des deux nombres qui correspondent à M?

90. Système de coordonnées. — 1° Axes de coordonnées.

Traçons dans un plan, deux axes perpendiculaires $x'x$ et $y'y$ se coupant en un point O (*fig. 30*). Prenons, sur chaque axe, le point O comme point initial et choisissons aussi sur chaque axe une unité de longueur.

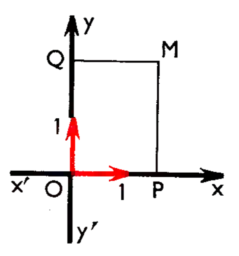


Fig. 30.

Nous dirons que ces axes sont des axes de coordonnées (rectangulaires).

2° Coordonnées d'un point du plan.

Soit M un point du plan. Il se projette en P sur $x'x$ et en Q sur $y'y$.

☆ DÉFINITIONS. — ***On appelle* abscisse *du point M la mesure algébrique* $\overline{OP}$ *du vecteur* $\overrightarrow{OP}$ *de l'axe* x'x. *On écrit :* x = $\overline{OP}$.**

***On appelle* ordonnée *du point M la mesure algébrique* $\overline{OQ}$ *du vecteur* $\overrightarrow{OQ}$ *de l'axe* y'y. *On écrit* y = $\overline{OQ}$.**

L'abscisse* x *et l'ordonnée* y *du point M, prises dans l'ordre : abscisse d'abord, ordonnée ensuite, s'appellent les* coordonnées *du point M.

L'axe* x'x *s'appelle* l'axe des abscisses *(ou axe des* x*).

L'axe* y'y *s'appelle* l'axe des ordonnées *(ou axe des* y*).

***Le point O d'intersection des axes s'appelle* l'origine des coordonnées.**

3° Notations. Pour désigner le point M de coordonnées x et y on écrit parfois : M (x, y).

Il est bien entendu que la première lettre x désigne l'abscisse et que la deuxième y désigne l'ordonnée.

• REMARQUES. — I. Le quadrilatère OPMQ, s'il existe, est un rectangle. On a donc : OP = MQ et OQ = MP (*fig. 30*).

Or OP est la valeur absolue de l'abscisse x et MQ est la distance de M à l'axe $y'y$. Nous retiendrons que :

1° la valeur absolue de l'abscisse d'un point est la distance de ce point à l'axe des ordonnées;

2° la valeur absolue de l'ordonnée d'un point est la distance de ce point à l'axe des abscisses.

II. Les coordonnées x et y portent aussi le nom de *coordonnées cartésiennes* du nom de DESCARTES, philosophe et mathématicien français (1596-1650).

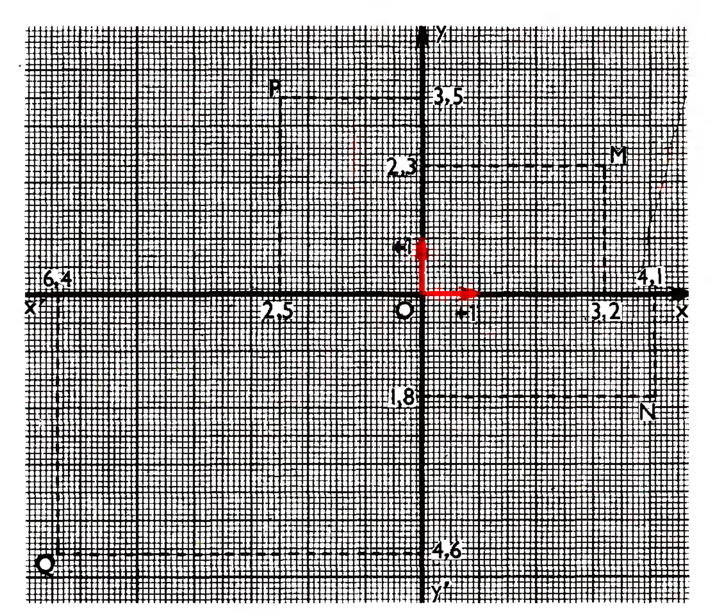


Fig. 31.

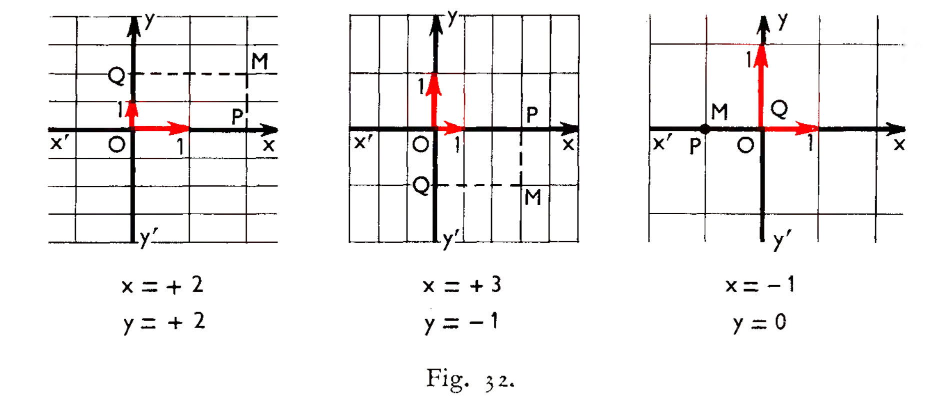


Fig. 32.

La recherche des coordonnées d'un point est facilitée si l'on a réalisé au préalable un quadrillage du plan ou bien si l'on dispose d'un papier quadrillé par millimètre : sur un tel papier, les traits sont plus épais chaque centimètre et encore plus épais tous les 5 centimètres. La lecture est donc très rapide.

EXEMPLE. Sur la *figure 31* on lit les coordonnées des points suivants :

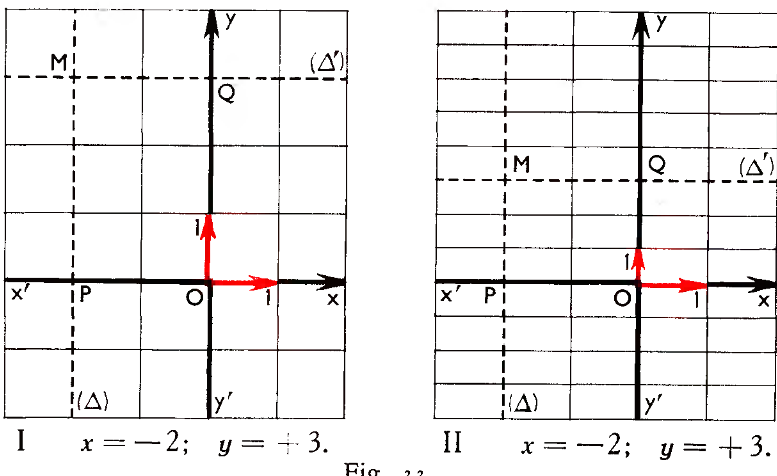
point	M	N	P	Q
abscisse x	+ 3,2	4,1	— 2,5	— 6,4
ordonnée y	+ 2,3	— 1,8	+ 3,5	— 4,6.

Lorsqu'on a déterminé les coordonnées x et y d'un point M, on dit que l'on a repéré le point M par rapport aux axes de coordonnées.

• REMARQUE. Il n'est pas nécessaire (ou il n'est pas toujours possible) de choisir la même unité de longueur sur les deux axes. Sur les figures n° 32 les unités, différentes pour chaque axe, sont indiquées et l'on évalue naturellement les coordonnées sur chaque axe à l'aide des unités de longueur correspondant.

91. Construire un point connaissant ses coordonnées. — Examinons le problème inverse.

1° Soit deux nombres relatifs, par exemple — 2 et + 3, donnés dans cet ordre. S'il existe un point M d'abscisse — 2, sa projection sur $x'x$ se trouve



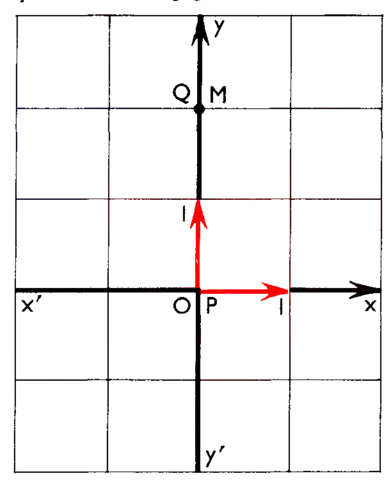
I $x = -2$; $y = +3$. II $x = -2$; $y = +3$.

Fig. 33.

au point P de $x'x$ tel que $\overline{OP} = -2$. Ce point P est bien déterminé lorsqu'on connaît l'unité de longueur choisie sur l'axe $x'x$ (voir *fig. 33* I et II). Le point M cherché ne peut donc se trouver que sur la droite (Δ), parallèle à $y'y$ et passant par P.

De même, le point M se trouvera sur la droite (Δ'), parallèle à $x'x$ et passant par le point Q de $y'y$, définie par $\overline{OQ} = +3$. Les droites (Δ) et (Δ') perpendiculaires respectivement à deux droites sécantes $x'x$ et $y'y$ sont aussi sécantes. Leur point commun M est le point cherché : il est unique.

2° Prenons, comme deuxième exemple, les nombres 0 et $+2$ dans cet ordre. S'il existe un point M d'abscisse 0, sa projection P sur $x'x$ se trouve à l'origine des coordonnées. Le point M cherché ne peut donc se trouver que sur l'axe $y'y$. Il est alors confondu avec sa projection Q sur cet axe. Or cette projection Q est déterminée par la donnée de $\overline{OQ} = +2$. Le point M est donc unique (*fig. 34*).



x = 0

y = 2

Fig. 34.

Le raisonnement est général et s'applique quelles que soient les valeurs numériques de l'abscisse et de l'ordonnée.

Nous énoncerons donc la conclusion d'ensemble :

▪ THÉORÈME. ***1° A tout point du plan correspondent deux nombres relatifs appelés coordonnées du point (abscisse et ordonnée).***

2° A tout couple de deux nombres relatifs correspond un point du plan et un seul qui a pour abscisse le premier nombre et pour ordonnée le second nombre.

92. Signe des coordonnées. — 1° *Le point* M *est sur un axe de coordonnées.*

a) L'origine des coordonnées O a des coordonnées nulles :

$$x = 0, \qquad y = 0,$$

et c'est le seul point dont les deux coordonnées soient nulles.

b) Si le point M est sur l'axe $y'y$, il se projette en O sur $x'x$. Son abscisse est donc nulle. Inversement, si l'abscisse x d'un point est nulle, il se projette en O sur $x'x$ et, par conséquent, ce point est sur $y'y$.

c) De la même façon, si un point M est sur $x'x$, son ordonnée y est nulle et inversement.

Point	*à l'origine*	*sur $x'x$*	*sur $y'y$*
abscisse	$x = 0$	$x > 0$ sur Ox $x < 0$ sur Ox'	$x = 0$
ordonnée	$y = 0$	$y = 0$	$y > 0$ sur Oy $y < 0$ sur Oy'

2° Le point M n'est situé sur aucun des axes de coordonnées. Les deux axes de coordonnées partagent le plan en quatre régions que nous avons numérotées I, II, III, IV. D'après la définition des coordonnées d'un point, le signe des coordonnées est indiqué par le tableau suivant :

Régions		Coordonnées
I	$\Leftrightarrow$	$x > 0$ $y > 0$
II	$\Leftrightarrow$	$x < 0$ $y > 0$
III	$\Leftrightarrow$	$x < 0$ $y < 0$
IV	$\Leftrightarrow$	$x > 0$ $y < 0$

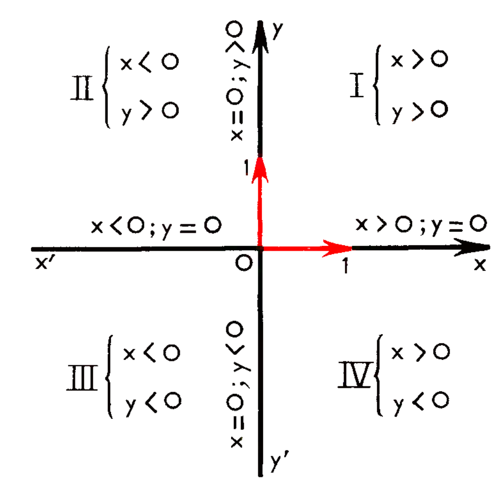


Fig. 35.

93. Points symétriques par rapport à l'axe des abscisses. — Soit M (x, y) et M′ (x', y') deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses (*fig. 36*). La droite $x'x$ est la médiatrice du segment MM′ qu'elle coupe en son milieu P. Les deux points M et M′ se projettent donc au même point P de $x'x$; ils ont même abscisse :

$$x' = x = \overline{OP}.$$

D'autre part, la droite MM′ est parallèle à $y'y$ et les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PM'}$ sont opposés. Les points M et M′ se projettent donc sur $y'y$ en des points respectifs Q et Q′ tels que $\overline{OQ} = -\overline{OQ'}$. Les ordonnées des deux points M et M′ sont opposées :

$$y' = -y.$$

▪ THÉORÈME. — ***Deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ont même abscisse et des ordonnées opposées.***

Réciproquement, comparons les positions de deux points M et M_1 de coordonnées respectives : (x, y) et (x_1, y_1)
telles que : $x_1 = x$ et $y_1 = -y$ (*fig. 37*).

Il résulte de l'étude directe que le symétrique M′ de M par rapport à $x'x$ a pour coordonnées :

$$M' : x' = x \quad \text{et} \quad y' = -y.$$

On a donc : $x' = x_1$ et $y' = y_1$.

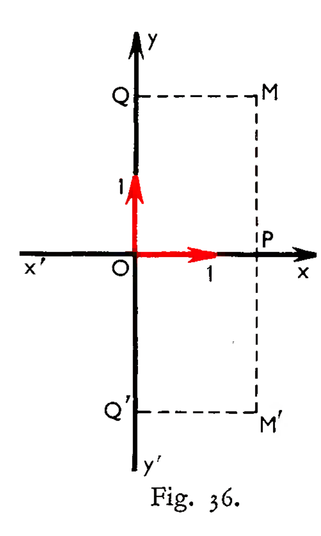


Fig. 36.

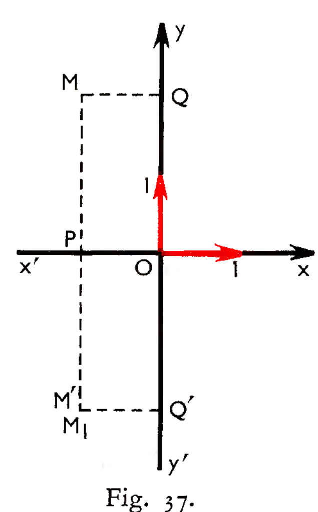


Fig. 37.

Il en résulte que les points M_1 et M′ sont confondus. Le point M_1 est donc le symétrique de M par rapport à l'axe $x'x$.

▪ RÉCIPROQUE. — ***Si deux points ont même abscisse et des ordonnées opposées, ils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.***

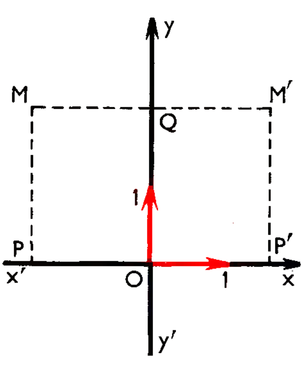


Fig. 38.

94. Points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. — Par un raisonnement analogue on démontrerait que (*fig. 38*) :

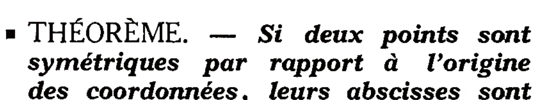
▪ ***1° Si deux points M et M′ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, ils ont des abscisses opposées et même ordonnée.***
2° Si deux points ont des abscisses opposées et même ordonnée, ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

95. Points symétriques par rapport à l'origine. — Soit M (x, y) et M′ (x', y') deux points symétriques par rapport à l'origine O (*fig. 39*). O est le milieu du segment MM′.

Il est d'abord évident que les points M et M′ sont situés dans des angles opposés par le sommet (I et III ou II et IV). Leurs abscisses sont donc de signes contraires et leurs ordonnées sont aussi de signes contraires. Comparons leurs valeurs absolues. Le point M se projette en P sur $x'x$ et M′ se projette en P′. Les triangles OPM et OP′M′ rectangles en P et P′ sont égaux, d'après le 1er cas d'égalité des triangles rectangles (OM = OM′ et $\widehat{POM} = \widehat{P'OM'}$). Par suite : OP = OP′ et PM = P′M′.

En rassemblant les résultats on conclut que :

$$x' = -x; \qquad y' = -y.$$



▪ THÉORÈME. — ***Si deux points sont symétriques par rapport à l'origine des coordonnées, leurs abscisses sont opposées, leurs ordonnées sont opposées.***

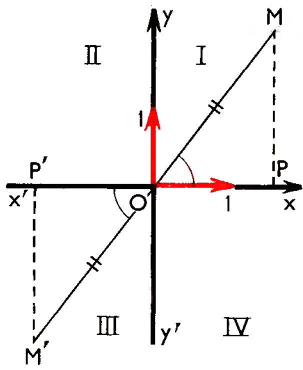


Fig. 39.

• REMARQUE. Si M est sur l'un des axes de coordonnées, le triangle OPM n'existe plus, mais le résultat est encore vrai. Par exemple, si M est sur Ox, M′ y est aussi et l'on a : $x' = -x$; $y' = -y = 0$.

Réciproquement, comparons les positions de deux points M et M_1 de coordonnées respectives : (x, y) et (x_1, y_1)

telles que : $x_1 = -x$ et $y_1 = -y$.

Il résulte de l'étude directe que le symétrique M′ de M par rapport à O a pour coordonnées :

$$x' = -x \quad \text{et} \quad y' = -y.$$

On a donc : $x' = x_1$ et $y' = y_1$.

Il en résulte que les points M′ et M_1 sont confondus. Le point M_1 est donc le symétrique de M par rapport à O.

▪ RÉCIPROQUE. — ***Si deux points ont des abscisses opposées et des ordonnées opposées, ils sont symétriques par rapport à l'origine des coordonnées.***

Résumé

Points	Abscisses	Ordonnées	Symétrie par rapport à
$M(x, y)$ et $M'(x', y')$	$x = x'$	$y = -y'$	$x'x$
	$x = -x'$	$y = y'$	$y'y$
	$x = -x'$	$y = -y'$	O

96. Points alignés avec l'origine. — Soit un point M (x, y) et un point M′ (x', y') tels que la droite MM′ passe par O. (Nous supposons naturellement que ces points sont distincts et que chacun d'eux est distinct de l'origine.) Étudions d'abord le cas général où aucun des points n'est situé sur un axe de coordonnées. Le point M se projette en P sur $x'x$ et le point M′ se projette en P′ sur $x'x$ (*fig. 40.*) Les droites PM et P′M′ sont parallèles. En vertu de la double application du théorème de Thalès au triangle (nº 89), nous obtenons :

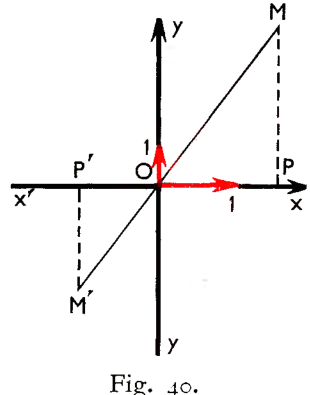


Fig. 40.

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{P'M'}}{\overline{PM}}, \quad \text{ou :} \quad \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y},$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{xy' - yx' = 0} \qquad (1)$$

Si nous supposons maintenant que M et M′ sont sur $x'x$, nous trouvons :

$$y = y' = 0, \quad \text{d'où :} \quad xy' - yx' = 0.$$

Si M et M′ sont sur $y'y$, l'on a : $x = x' = 0$, donc $xy' - yx' = 0$. Le résultat est donc général.

▪ THÉORÈME. — ***Si deux points M (x, y) et M′ (x′, y′), distincts et distincts de l'origine, sont alignés avec l'origine, on a :***

$$\boldsymbol{xy' - yx' = 0.}$$

Réciproquement, supposons qu'entre les coordonnées (x, y) d'un point M et les coordonnées (x', y') d'un point M′ nous ayons la relation :

$$xy' - yx' = 0, \qquad (1)$$

en supposant, en outre, que M et M′ sont distincts et distincts de O. Prenons d'abord le cas général où aucun des points n'est sur un axe de coordonnées. Traçons la droite (D) passant par O et M (*fig. 41*) et appelons N le point où cette droite (D) rencontre la parallèle (Δ) tracée par M′ à $y'y$. L'abscisse x_1 du point N est égale à l'abscisse x' de M′ :

$$x_1 = x' = \overline{OP'}. \qquad (2)$$

Si y_1 est l'ordonnée de N, on a, d'après le théorème direct :

$$xy_1 - yx_1 = 0$$

ou, en tenant compte de (2) :

$$xy_1 - yx' = 0. \qquad (3)$$

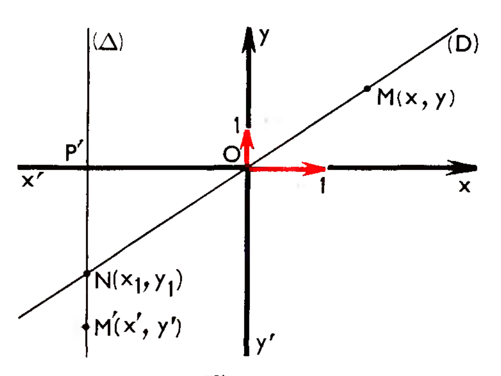


Fig. 41.

En comparant (1) et (3), on déduit :

$$xy_1 = xy' \quad \text{ou} \quad x(y_1 - y') = 0.$$

Comme x n'est pas nul, puisque M n'est pas sur $y'y$, on en conclut que :

$$y_1 - y' = 0 \qquad \text{ou} \qquad y_1 = y'.$$

Les points N et M′, qui ont les mêmes coordonnées, sont confondus. Le point M′ est donc sur (D).

Si nous supposons maintenant que M est sur $x'x$, nous avons : $y = 0$; la relation (1) donne : $xy' = 0$;

comme $x \neq 0$, on en déduit : $y' = 0$. Le point M′ est aussi sur $x'x$.

De même, si M est sur $y'y$ (sauf en O), on en déduit que M′ est aussi sur $y'y$.

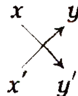
▪ RÉCIPROQUE. — ***Si deux points M (x, y) et M′ (x′, y′), distincts et distincts de l'origine, ont des coordonnées qui satisfont à la relation xy′ — yx′ = 0, ces points sont alignés avec l'origine.***

• REMARQUE. La relation (1) s'écrit très facilement en appliquant le mécanisme suivant : on écrit

sur une première ligne les coordonnées x, y de l'un des points

et sur une deuxième ligne les coordonnées x', y' de l'autre point

et l'on égale les produits en croix :



EXEMPLE. *Soit* A *le point de coordonnées* (— 2, + 1) *et* (Δ) *la droite passant par* O *et* A. *Compléter les coordonnées des points* B, C, D *de* (Δ) *connaissant l'une d'elles donnée par le tableau suivant* :

	abscisse	ordonnée
A	-2	$+1$
B	$x = +2{,}6$	$y =$
C	$x' =$	$y' = -0{,}8$
D	$x'' = -3$	$y'' =$

$$\begin{matrix} -2 & & +1 \\ & \times & \\ +2{,}6 & & y \end{matrix} \qquad -2\,y = 2{,}6; \quad y = -1{,}3$$

$$\begin{matrix} -2 & & +1 \\ & \times & \\ x' & & -0{,}8 \end{matrix} \qquad x' = 1{,}6$$

$$\begin{matrix} -2 & & +1 \\ & \times & \\ -3 & & y'' \end{matrix} \qquad -2\,y'' = -3; \quad y'' = 1{,}5.$$

97. Coordonnées du milieu d'un segment. — Soit $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ les extrémités d'un segment M_1M_2 (*fig. 42*).

Soit A le milieu du segment M_1M_2. Les parallèles à l'axe $y'y$ tracées respectivement par M_1, M_2 et A coupent l'axe $x'x$ en P_1, P_2 et H. Puisque A est le milieu du segment M_1M_2, ces parallèles sont équidistantes et le point H est le milieu du segment P_1P_2. On a :

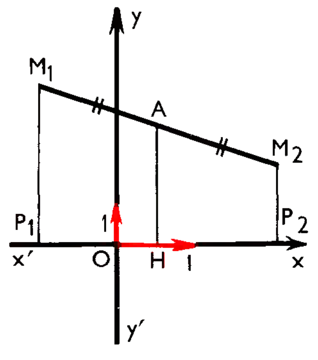


Fig. 42.

$$\overline{OH} = \frac{\overline{OP_1} + \overline{OP_2}}{2}.$$

L'abscisse x de A est donc :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \qquad (1)$$

De la même façon son ordonnée y est :

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (2)$$

▪ THÉORÈME — ***Les coordonnées du milieu d'un segment sont les demi-sommes des coordonnées de même nom des extrémités du segment.***

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.}$$

• Remarque. Si la droite M_1M_2 est parallèle à $y'y$, les droites M_1P_1, M_2P_2, AH sont confondues et l'on a : $x_1 = x_2 = x$. La formule (1) est encore vraie. Il en est de même pour la formule (2) si la droite M_1M_2 est parallèle à $x'x$.

Résumé.

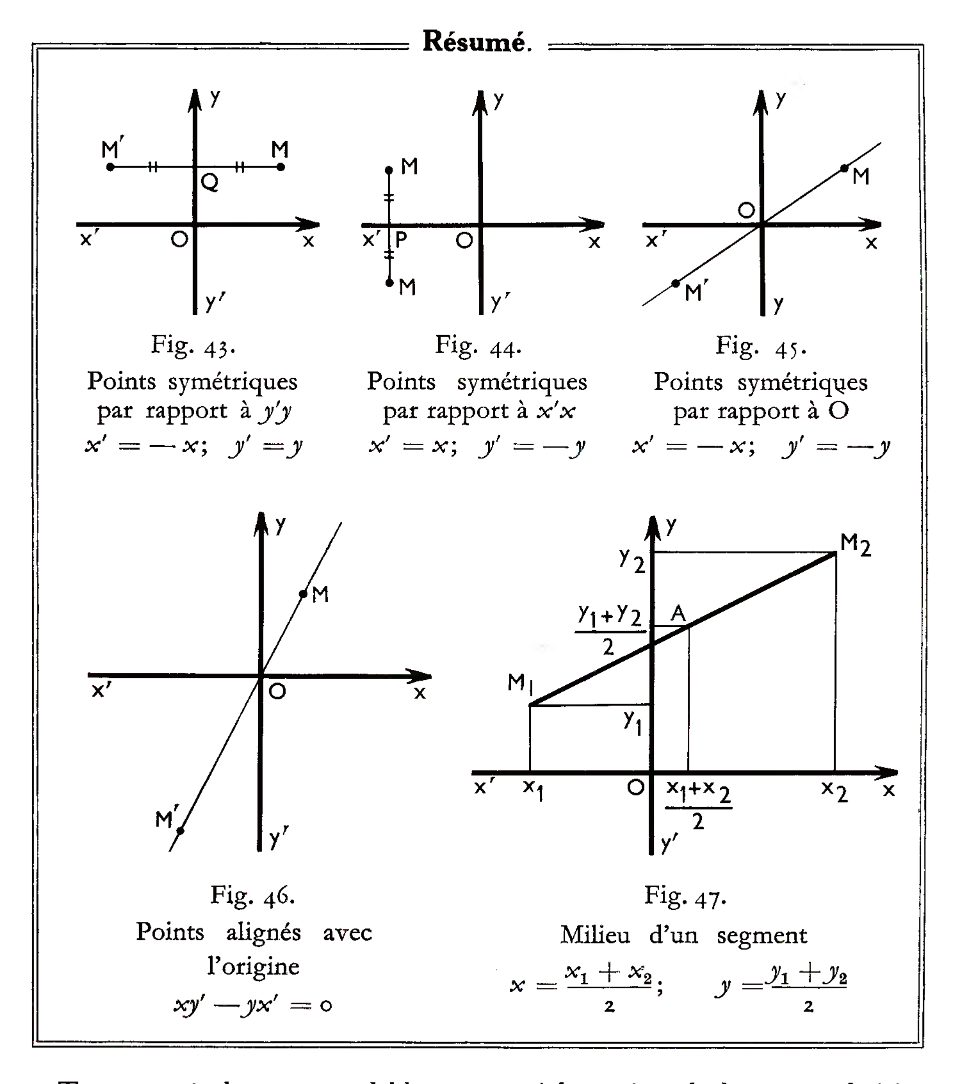


Fig. 43. Points symétriques par rapport à $y'y$
$x' = -x; \quad y' = y$

Fig. 44. Points symétriques par rapport à $x'x$
$x' = x; \quad y' = -y$

Fig. 45. Points symétriques par rapport à O
$x' = -x; \quad y' = -y$

Fig. 46. Points alignés avec l'origine
$xy' - yx' = 0$

Fig. 47. Milieu d'un segment
$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Tous ces résultats sont valables même si les unités de longueur choisies sur les axes sont différentes.

- **Applications.**

Effectuer les exercices ci-dessous sur du papier quadrillé (de préférence du papier millimétré). Tracer deux axes de coordonnées $x'x$, $y'y$ sécants en O. (Sur du papier millimétré placer les axes de coordonnées sur des traits épais). Prendre le centimètre comme unité sur les deux axes.

362. — *Placer les points désignés dans le tableau ci-dessous :*

Point	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Abscisse	+ 4,1	— 3,7	— 3,5	+ 5,6	— 3,6	0	+ 4,1	— 3,5	— 4,1	— 3,5
Ordonnée	+ 3,5	+ 2,1	— 4,8	— 1,7	0	— 1,9	0	— 1,7	+ 3,5	+ 4,8

363. — *Reconnaître parmi les points précédents :*
a) *des points ayant la même abscisse;*
b) *des points ayant la même ordonnée;*
c) *deux points symétriques par rapport à l'axe des* x;
d) *deux points symétriques par rapport à l'axe des* y.

364. — *En reprenant les points de l'exercice 362, donner les coordonnées des points suivants :*
a) *le symétrique de* A *par rapport à l'origine;*
b) *le symétrique de* B *par rapport à l'axe des abscisses;*
c) *le symétrique de* D *par rapport à l'axe des ordonnées;*
d) *le symétrique de* E *par rapport à l'origine.*

365. — *En reprenant les points de l'exercice 362, trouver :*
a) *l'ordonnée du point de la droite* OA *ayant pour abscisse* — 12,3;
b) *l'abscisse du point de la droite* OB *ayant pour ordonnée* — 8,4;
c) *l'abscisse du point de la droite* OF *ayant pour ordonnée* + 4,9;
d) *l'ordonnée du point de la droite* OE *ayant pour abscisse* — 2,5.

366. — *En reprenant les points de l'exercice 362, calculer les coordonnées du milieu du segment* AB, *celles du milieu du segment* EF, *celles du milieu du segment* GH.

367. — *Parmi les points suivants trouver ceux qui, deux à deux, sont alignés avec l'origine :*

Point	I	J	K	R	S
Abscisse	— 1,5	+ 4,5	+ 1,6	+ 1	+ 2
Ordonnée	+ 2,4	— 1,5	— 3	— 1,6	—3,75

368. — *Un point* A *a pour abscisse* a *et pour ordonnée* b. *Calculer les coordonnées du milieu du segment* OA, O *étant l'origine des coordonnées.*

369. — 1° *Où se trouvent tous les points qui, par rapport à deux axes de coordonnées, ont pour abscisse* — 2?
2° *Même question pour les points qui ont pour ordonnée* + 5?

II. REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

98 ☆ DÉFINITION. — ***Un nombre y est fonction d'un nombre variable x lorsqu'à une valeur numérique de x on peut faire correspondre une valeur de y.***

EXEMPLES. I. Nous savons calculer le périmètre y d'un cercle quand nous connaissons son rayon x. Nous dirons que y est fonction de x et nous pouvons préciser que :

$$y = 2\,\pi x.$$

II. L'aire y d'un carré est fonction de la mesure x de son côté :

$$y = x^2.$$

III. Au cours d'une journée, la température y, en un certain lieu, est fonction de l'heure x. A une heure quelconque, on peut observer l'indication fournie par un thermomètre. Nous dirons que y est fonction de x.

Nous remarquons que dans les exemples I et II nous avons écrit une formule qui relie les valeurs de x et de y alors que, dans l'exemple III, nous n'avons pas donné de formule.

Un moyen souvent utilisé est de donner une égalité qui permet de calculer y connaissant x. Telles sont les fonctions :

$$y = 2\,x + 3 \qquad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 3}{x - 2} \qquad (2)$$

$$y = \sqrt{x - 1}. \qquad (3)$$

Nous remarquons que dans l'exemple (1), x peut prendre n'importe quelle valeur, nous dirons que la fonction y est *définie* quel que soit x.

Dans l'exemple (2), la valeur numérique de y n'existe pas si on donne à x la valeur 2; nous dirons que la fonction y est définie pour toute valeur de x différente de 2.

Dans l'exemple (3), y n'a pas de valeur numérique pour $x < 1$. Nous dirons que la fonction y est définie pour $x \geqslant 1$.

Une fonction peut n'être définie que pour des valeurs isolées de la variable. C'est ce qui arrive pour la fonction :

$$y = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times x,$$

où x est un nombre entier.

99. Représentations graphiques. — On a relevé, d'heure en heure, pendant une journée d'hiver, les températures exprimées en degrés centigrades. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

0 h : — 1°,	6 h : — 4°,	12 h : 5°,	18 h : 1°
1 h : — 2°,	7 h : — 3°,	13 h : 7°,	19 h : — 1°
2 h : — 4°,	8 h : — 3°,	14 h : 7°,	20 h : — 2°
3 h : — 5°,	9 h : — 2°,	15 h : 6°,	21 h : — 3°
4 h : — 6°,	10 h : 0°,	16 h : 4°,	22 h : — 4°
5 h : — 5°,	11 h : 2°,	17 h : 2°,	23 h : — 5°

Ce tableau fournit des renseignements précis, mais il est long à lire et il faut le suivre avec attention pour se rendre compte des variations de la température. Il est plus commode d'enregistrer les résultats de la façon suivante.

Sur du papier quadrillé, traçons deux axes $x'Ox$, $y'Oy$ rectangulaires. L'axe $x'x$ ou axe des heures est numéroté de 0 à 23 heures, le côté d'un carré du quadrillage principal représentant 1 heure. Sur l'axe $y'y$ ou axe des températures, le côté d'un carré du quadrillage représentant 1 degré; le sens positif étant le sens $y'y$, les températures négatives sont donc portées en dessous de l'axe des heures. Cela fait, chaque observation est marquée sur le graphique par un point. En tout, nous obtenons 24 points. La seule inspection du dessin obtenu montre immédiatement d'une manière plus frappante que le tableau précédent comment la température a varié pendant la durée de l'observation.

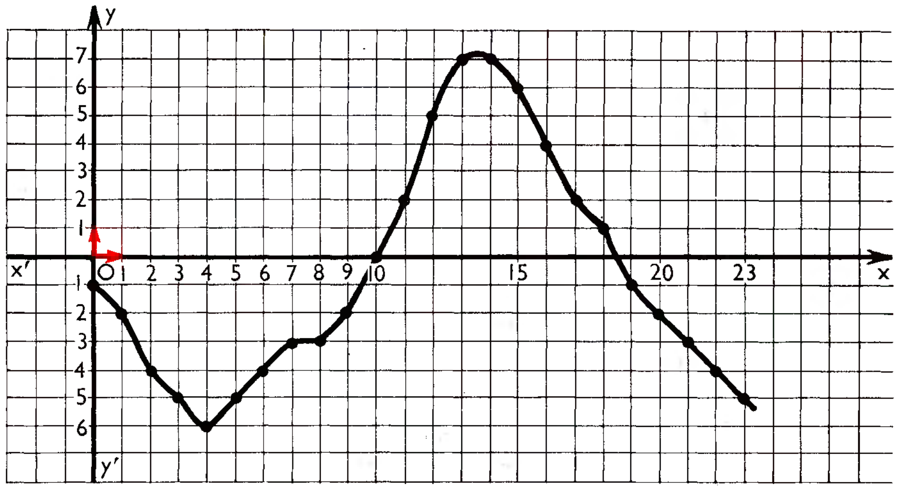


Fig. 48.

• Remarque. L'usage est de joindre les points successifs du graphique par un trait continu pour mieux marquer la marche du phénomène étudié. On peut penser, en effet, qu'à tout moment il y a une température et que, sauf exception anormale, cette température ne varie pas brusquement. C'est ainsi qu'on obtient le tracé de la *figure 48*.

On peut répondre, à l'aide de ce graphique, aux questions suivantes :

1° Entre quelles heures la température a-t-elle été supérieure à 2° ?

Réponse : entre 11 h et 17 h.

2° Entre quelles heures la température a-t-elle été inférieure à — 4° ?

Réponse : entre 2 h et 6 h et après 22 h.

100. Statistiques. — Les statistiques peuvent avantageusement être remplacées par des graphiques.

Le graphique (*fig. 49*) rapproche la statistique de la production du blé de celle de la surface ensemencée en blé. On voit bien qu'il y a une certaine correspondance entre les deux; cependant l'augmentation de la production ne correspond pas toujours à l'augmentation de la surface; le rendement à l'hectare n'est pas le même tous les ans.

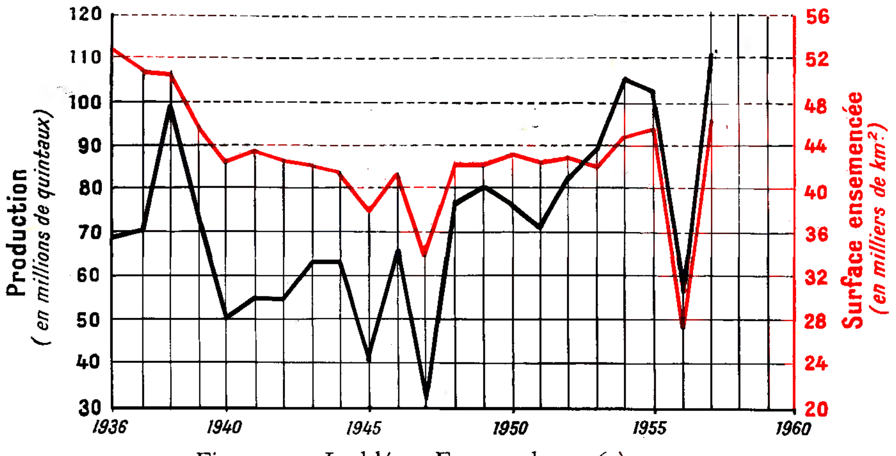


Fig. 49. — Le blé en France, de 1936 à 1957.

• Remarque. Dans les graphiques qui représentent des statistiques, *on ne devrait figurer que les points* qui traduisent les nombres que l'on veut représenter. Il y eu une récolte de blé en 1950 et une en 1951 ; la ligne qui joint les deux points ne signifie rien. Il n'en était pas ainsi sur le graphique de la température où, à chaque moment, la courbe tracée faisait correspondre une température, soit *observée*, soit *vraisemblable* si elle n'a pas été observée.

101. Représentation graphique d'une fonction[1]. — Soit la fonction :

$$y = \frac{8x - 6}{x^2 + 1}.$$

On peut donner à x une valeur quelconque, on saura calculer la valeur correspondante de y. On peut donc dresser un tableau des valeurs correspondantes de x et de y. Ce tableau est illimité puisqu'on peut donner à x une valeur quelconque. Bornons-nous aux valeurs entières de x comprises entre -5 et $+5$ et lorsque y n'est pas un nombre décimal, calculons-le à un centième près.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$-1{,}77$	$-2{,}24$	-3	$-4{,}4$	-7	-6	1	2	1,8	1,53	1,31

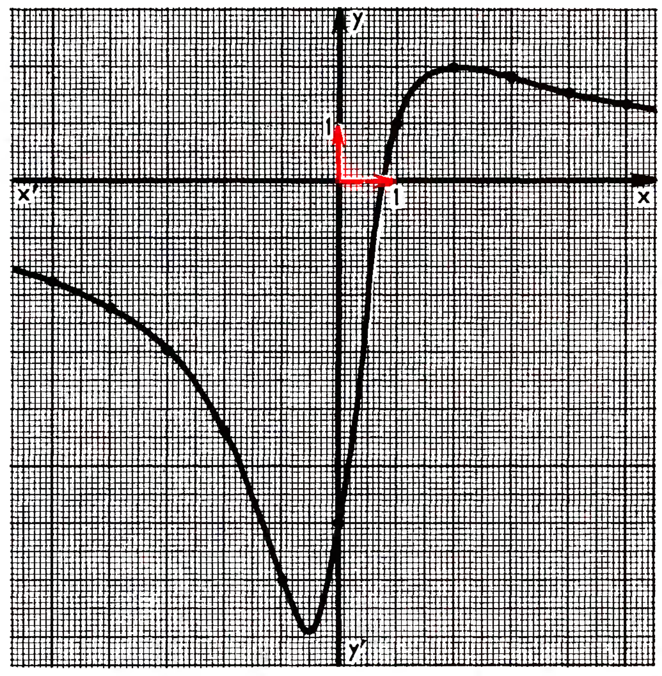


Fig. 50.

Le tableau précédent fournit les coordonnées de 11 points que nous pouvons construire au moyen de deux axes de coordonnées rectangulaires (*fig. 50*).

1. On dit aussi : « graphique de la fonction » et même « graphe ».

Ce graphique n'est pas complet, et il ne peut pas l'être, car nous n'avons donné à x qu'un nombre restreint de valeurs et, en outre, pour certaines valeurs de x, par exemple, $x = 20$, le point figuratif ne pourrait pas être placé sur le dessin.

• REMARQUE. — On peut voir, sur le graphique, que la fonction y varie beaucoup quand x varie de -1 à $+1$. On peut essayer de perfectionner le tracé en donnant à x les valeurs $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$.

Pour $x = -\frac{1}{2}$, on trouve $y = -8$

et pour $x = \frac{1}{2}$, on trouve $y = -1{,}6$.

On est ainsi en mesure de tracer un trait continu qui donne une idée approximative plus précise de l'allure de la fonction.

102. Appareils enregistreurs. — Il existe des dispositifs qui tracent automatiquement la courbe représentative des variations d'un certain phénomène. Ainsi les thermomètres enregistreurs dessinent sur une feuille de papier la courbe qui représente la température en fonction du temps, et les baromètres enregistreurs dessinent la courbe qui représente la pression atmosphérique en fonction du temps.

• Applications.

370. — *Un cycliste quitte une ville à la vitesse moyenne de 20 km/h. En désignant par* x *la mesure en heures du temps écoulé depuis son départ, par* y *la mesure en kilomètres du chemin qu'il a parcouru, exprimer* y *en fonction de* x.

371. — *Un cycliste doit faire un trajet de 60 km et sa vitesse a pour mesure* x, *l'unité étant le km/h. En désignant par* y *la mesure en heures de la durée du trajet, exprimer* y *en fonction de* x.

372. — *Indiquer pour quelles valeurs de* x *les fonctions :*

$$y = x^3, \qquad y = \frac{1}{x^2}, \qquad y = \sqrt{x},$$

sont définies.

373. — *Faire le graphique de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude avec les données suivantes :*

Altitude (en km)	0	2	4	6	8	10
Pression (en cm de mercure)	76	59	46	35	27	20

Sur l'axe x'Ox, *1 cm représentera 1 km; sur l'axe* y'Oy, *1 cm représentera 10 cm de mercure.*

EXERCICES ET PROBLÈMES

★

374. — 1° Tracer deux axes de coordonnées sur lesquels l'unité de longueur est le centimètre et placer les points suivants :

Point	A	B	C	D	E	F	G
Abscisse	$-1{,}2$	$+5{,}4$	$+3{,}7$	$+2{,}3$	$-5{,}4$	$-3{,}7$	$+2{,}3$
Ordonnée	$+2{,}4$	$+7{,}2$	$-4{,}3$	$-4{,}6$	$-7{,}2$	$-4{,}3$	$+4{,}6$

2° Indiquer des points ayant les propriétés suivantes :
a) symétriques par rapport à l'axe des abscisses;
b) symétriques par rapport à l'axe des ordonnées;
c) symétriques par rapport à l'origine des coordonnées.
3° Trouver deux points alignés avec l'origine (autres que ceux du 2° *c*).

375. — 1° Avec les données de l'exercice précédent, donner les coordonnées :
a) du symétrique de A par rapport à l'axe Ox;
b) du symétrique de D par rapport à l'origine;
c) du symétrique de B par rapport à l'axe Oy.
2° Calculer les coordonnées des milieux des segments AB, CD, EF.

376. — On a pesé un bébé tous les jours, après sa naissance, pendant 15 jours. On a noté les poids suivants :

3,35 kg;	3,2 kg;	3,1 kg;	3 kg;	2,975 kg;
3 kg;	3,05 kg;	3,11 kg;	3,15 kg;	3,2 kg;
3,25 kg;	3,275 kg;	3,31 kg;	3,35 kg;	3,375 kg.

Dresser un graphique représentant le poids en fonction du temps.

377. — 1° Construire les points A, B, C, D, connaissant leurs coordonnées :

	A	B	C	D
x	2	2	-3	-3
y	3	-5	-5	3

2° Calculer les coordonnées des milieux des segments AC et BD. Expliquer le résultat.

378. — 1° Construire les points A, B, C, D, connaissant leurs coordonnées :

	A	B	C	D
x	-1	1	3	-3
y	2	-2	-4	4

2° O désignant l'origine des coordonnées, comment sont placés les points A, O, B d'une part; C, O, D d'autre part?

3° Que peut-on dire du quadrilatère ACBD?

379. — 1° Deux points ayant la même abscisse sont alignés avec l'origine. Que peut-on en conclure?

2° Même question pour deux points ayant la même ordonnée.

380. — 1° Deux points sont symétriques à la fois par rapport à l'axe des abscisses et par rapport à l'origine. Que peut-on en conclure?

2° Même question en remplaçant l'axe des abscisses par l'axe des ordonnées.

381. — 1° Les points A($x = 33$; $y = 77$) et B ($x = 63$; $y = 147$) sont-ils alignés avec l'origine O?

2° Même question avec A′ ($x = 75$; $y = -125$) et B′ ($x = -77$; $y = 128$); Peut-on vérifier les résultats par un graphique?

382. — 1° Calculer les valeurs que prend la fonction :

$$y = \frac{-3}{x},$$

pour $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

2° Placer les points représentant les valeurs correspondantes trouvées au 1° et dessiner le graphique de la fonction $y = \frac{-3}{x}$ lorsque x varie de $\frac{1}{2}$ à 4.

383. — 1° Faire la représentation graphique de la fonction :

$$y = \frac{x^2}{2}$$

lorsque x varie de -5 à $+5$.

2° Quelle remarque peut-on faire sur les ordonnées de deux points de la courbe dont les abscisses sont des nombres opposés?

384. — 1° Placer sur l'axe $y'Oy$ le point A d'ordonnée -4, puis tracer tous les trapèzes ayant pour sommets O et A, rectangles en O et A, et dont les bases ont pour mesures 5 et 7 (¶ 4 *solutions*).

2° Calculer les coordonnées des sommets autres que O et A pour chacun des trapèzes du 1°.

385. — 1° Compléter l'implication :

$$\left.\begin{matrix} M(x, y) \\ M'(x', y') \\ x = x' \\ y \neq y' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow MM' \perp \ldots$$

2° Peut-on remplacer le signe d'implication par le signe d'équivalence logique?

★ ★

386. — 1° Un point A a pour coordonnées $x = +5$ et $y = -2$. Calculer les coordonnées du symétrique B de l'origine O par rapport à A.

2° L'extrémité C et le milieu M d'un segment CD ont la même abscisse -2. Quelle est l'abscisse de l'extrémité D?

L'ordonnée de C est $+1$, celle de M est -2. Calculer l'ordonnée de D.

3° Soit E le point de coordonnées $(-3, 0)$ et I le point de coordonnées $(0,2)$. Calculer les coordonnées du point F tel que I soit le milieu du segment EF.

387. — Étant donné les points A $(-1{,}2;\ -3{,}5)$, B $(-1{,}7;\ -2{,}4)$, C $(2{,}4;\ 5{,}1)$, D $(2{,}9;\ 4)$, calculer les coordonnées du milieu de AC et celles du milieu de BD. Que peut-on en conclure pour le quadrilatère ABCD?

388. — Étant donné les points A$(-3, +2)$ et B$(+5, +7)$, déterminer les coordonnées du milieu du segment OB (O étant l'origine des coordonnées), puis les coordonnées du point C, quatrième sommet du parallélogramme OABC. (¶ *Utiliser la connaissance des coordonnées du milieu des diagonales.*)

389. — Un parallélogramme ABCD a pour sommets les points A $(-4{,}8;\ -1{,}7)$. B $(+2{,}8;\ +3{,}5)$, C $(+2{,}6;\ -2{,}3)$. Déterminer les coordonnées du sommet D,

390. — 1° Construire les points suivants définis par leurs coordonnées :

Point	A	B	C	D	E	F	G	H
x	2	3	-2	3	-2	-3	2	-3
y	3	2	3	-2	-3	-2	-3	2

2° Montrer que tous ces points sont sur un même cercle de centre O. (¶ *Utiliser des triangles rectangles égaux.*)

391. — 1° Pour quelles valeurs de x la fonction $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ est-elle définie?

2° Que dire des valeurs prises par la fonction y lorsque x prend deux valeurs opposées? Quelle particularité présentent les points du graphique qui correspondent à ces valeurs? (¶ *Désigner par* a *et* — a *les deux valeurs opposées de* x.)

392. — 1° Pour quelles valeurs de x la fonction $y = x^3$ est-elle définie?

2° Que dire des valeurs prises par la fonction y lorsque x prend deux valeurs opposées? Quelle particularité présentent les points du graphique correspondants, à ces valeurs?

3° Représenter graphiquement la fonction $y = x^3$ lorsque x est compris entre -2 et $+2$.

393. — Représenter graphiquement, pour $-5 \leqslant x \leqslant 5$, les fonctions suivantes :

1° $y = \dfrac{x^2}{3}$; 2° $y = \dfrac{x^2-4}{6}$; 3° $y = \dfrac{x^2-8}{27}$;

4° $y = \dfrac{10}{1+x^2}$; 5° $y = \dfrac{4x}{1+x^2}$; 6° $y = \dfrac{x}{x+10}$.

★ ★ ★

394. — 1° Dessiner les points $A(x = 2;\ y = 3)$ et $B(x = -1;\ y = 2)$.
2° Construire les deux carrés ABCD et ABEF et lire les coordonnées des points C, D, E, F.
3° Expliquer géométriquement les valeurs des coordonnées trouvées au 2°.

395. — 1° Dessiner les points $A(x = 4;\ y = 5)$ et $B(x = -5;\ y = 4)$.
2° Démontrer que $OA = OB$.
3° Que peut-on dire de l'angle $\widehat{AOB}$?
4° Généraliser : le point A ayant comme coordonnées a, b, comment choisir celles du point B pour que les propriétés des 2° et 3° subsistent?

396. — Les points A $(0, a)$, B (b, c) et C $(-b, d)$ sont les sommets d'un triangle ABC.
1° Quelle particularité présente le milieu M du côté BC?
2° Quelle est la relation qui doit lier les nombres a, c, d pour que l'origine O soit le centre de gravité du triangle ABC?

397. — 1° Dessiner le point $A(x = 3,\ y = -2)$ et placer sur le segment OA le point M tel que $\dfrac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{3}$. Déterminer les coordonnées du point M.

2° Prolonger OA d'un segment AN tel que $AN = \dfrac{1}{3}OA$; calculer le rapport $\dfrac{\overline{ON}}{\overline{OA}}$ et les coordonnées du point N.

3° Prolonger AO d'un segment OP tel que $OP = \dfrac{OA}{2}$; calculer le rapport $\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OA}}$ et les coordonnées du point P.

4° Généraliser : R étant un point de la droite OA tel que $\dfrac{\overline{OR}}{\overline{OA}} = k$ (k nombre algébrique), déterminer les coordonnées du point R.

398. — 1° Tracer deux axes de coordonnées $x'Ox$ et $y'Oy$ et la droite zOz' qui porte les bissectrices des angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'Oy'}$. Placer sur $x'Ox$ deux points H et H', sur $y'Oy$ deux points I et I', de manière que :

$$\overline{OH} = \overline{OI'}, \qquad \overline{OH'} = \overline{OI}.$$

2° Démontrer que les points $A(x = \overline{OH};\ y = \overline{OI})$ et $A'(x = \overline{OH'};\ y = \overline{OI'})$ sont symétriques par rapport à la droite zz'.
3° Énoncer la propriété établie au 2°. Admet-elle une réciproque?
4° Comment changer les relations entre abscisses et ordonnées des points A et A' pour que ces points soient symétriques par rapport à la droite uu' support des bissectrices des angles $\widehat{xOy'}$ et $\widehat{x'Oy}$?

CHAPITRE VI

FONCTION $y = ax + b$

I. FONCTION $y = ax$.

Travaux pratiques d'initiation.

1° Combien coûtent 15 m de drap à 25 F le mètre?
Combien coûtent x mètres de drap à 25 F le mètre; si on désigne ce prix par y, en francs, quelle est la formule qui donne y en fonction de x? Que représente la valeur du rapport $\frac{y}{x}$?

2° Calculer les valeurs du monôme $2x$ quand on donne à x les valeurs successives suivantes :

$$-1\,000, \quad -500, \quad \frac{-8}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{3}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{10}{2\sqrt{2}}, \quad 10^6.$$

Dans quel ordre se présentent ces valeurs de x et les valeurs correspondantes de $2x$?

3° Mêmes questions pour le monôme $\frac{-x}{\sqrt{2}}$ quand on donne à x les valeurs successives suivantes :

$$-10\,000, \quad -3\sqrt{2}, \quad -\frac{5}{\sqrt{2}}, \quad 0, \quad 1, \quad 3, \quad \frac{16}{3\sqrt{2}}, \quad 500.$$

4° Tracer deux axes de coordonnées rectangulaires. Marquer les points ayant pour coordonnées respectives :

$$(-4, -6); \quad \left(-1, -\frac{3}{2}\right); \quad (0, 0); \quad (2, 3); \quad \left(3, \frac{9}{2}\right).$$

Que remarque-t-on? (unité : 1 cm sur chaque axe.)

5° Même question pour les points de coordonnées :

$$(-6, 4); \quad \left(-1, \frac{2}{3}\right); \quad (3, -2); \quad \left(\frac{9}{2}, -3\right).$$

103. Fonction y = 3 x. — 1° **Intervalle de variation.** Le monôme $3x$ a une valeur numérique, quelle que soit la valeur donnée à x.

On exprime ce fait en disant que la fonction $y = 3x$ est *définie* pour toute valeur de x.

Si l'on donne, par exemple, à x des valeurs entières de -3 à $+2$, l'on obtient pour y les valeurs correspondantes indiquées dans le tableau ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-9	-6	-3	0	3	6

2° **Sens de variation.** — Ce tableau fait pressentir que si l'on donne à x des valeurs de plus en plus grandes, y prend aussi des valeurs de plus en plus grandes. Démontrons-le. Soit x_1 et x_2 deux valeurs arbitraires et distinctes données à x; on peut toujours supposer : $x_1 > x_2$. La fonction y prend alors les valeurs respectives :

$$y_1 = 3x_1 \qquad \text{et} \qquad y_2 = 3x_2.$$

De l'inégalité :

$$x_1 > x_2, \tag{1}$$

on déduit, en multipliant les deux membres par 3, l'inégalité :

$$3x_1 > 3x_2, \tag{2}$$

c'est-à-dire :

$$y_1 > y_2. \tag{3}$$

Nous dirons que la fonction y est **croissante.**

On entend, par là, que y augmente si x augmente et que y diminue si x diminue.

3° **Étude de la fonction y pour des valeurs de x très grandes en valeur absolue.** — Si nous donnons à x des valeurs positives très grandes, nous obtenons, par exemple, le tableau suivant :

x	10	100	1 000
y	30	300	3 000

Cela fait pressentir que y peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on voudra, en donnant à x une valeur suffisamment grande. Par exemple, on

aura : $y = 3\,000\,000,$

ou : $3x = 3\,000\,000,$

si : $x = 1\,000\,000;$

comme la fonction y est une fonction croissante, on aura :

$$y > 3\,000\,000 \qquad \text{dès que l'on aura} \qquad x > 1\,000\,000.$$

On exprime ce fait en disant que y *devient infini par valeurs positives lorsque* x *devient infini par valeurs positives.*

De la même façon, on aura : $y = -6\,000\,000,$
ou : $3x = -6\,000\,000,$
si : $x = -2\,000\,000;$

comme la fonction est croissante, on aura : $y < -6\,000\,000$
dès que l'on aura : $x < -2\,000\,000.$

On dit que y *devient infini par valeurs négatives lorsque* x *devient infini par valeurs négatives*

4° **Tableau de variations.** — On résume les variations de la fonction $y = 3x$ par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Les symboles $+\infty$ et $-\infty$, qui se lisent respectivement :

plus l'infini ($+\infty$) et moins l'infini ($-\infty$)

ne représentent pas des nombres.

Ils traduisent le fait que y devient infini par valeurs positives ($+\infty$) ou par valeurs négatives ($-\infty$) lorsque x devient infini par valeurs positives ($+\infty$) ou par valeurs négatives ($-\infty$).

La flèche $\nearrow$ qui monte de gauche à droite traduit le fait que la fonction est croissante.

5° **Représentation graphique.** — Traçons deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ et choisissons sur chaque axe une unité de longueur (la même sur les deux axes). Étudions les points M dont les coordonnées x et y sont liées par la relation :

$$y = 3x.$$

Nous pouvons marquer les points figuratifs correspondant aux valeurs numériques calculées dans le tableau du 1°. D'après la *figure 51* ces points semblent être alignés avec l'origine. Nous allons le démontrer. Soit A le point de coordonnées $x' = 1$ et $y' = 3$ et M le point de coordonnées x et y telles que $y = 3x$, $(x \neq 0)$.

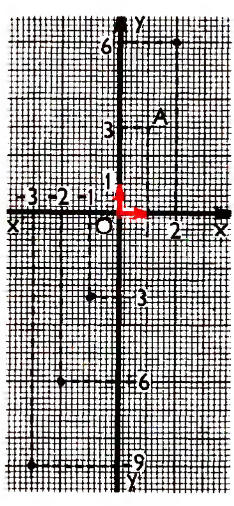


Fig. 51.

L'expression : $xy' - yx'$

est égale à :

$$x \times 3 - 3x \times 1 = 3x - 3x = 0.$$

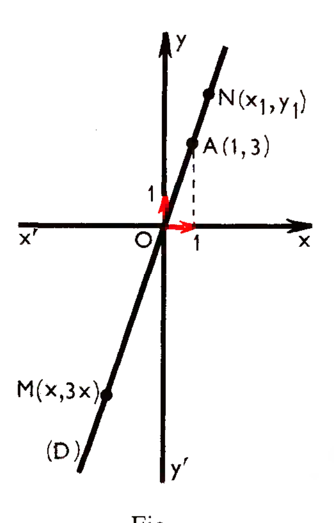


Fig. 52.

Par suite, en vertu du théorème du n° 96, les points O, A et M sont alignés (*fig. 52*).

Réciproquement, soit N un point de la droite (D) passant par O et A; appelons x_1 et y_1 ses coordonnées. Puisque O, A et N sont alignés, on a la relation :

$$1 \times y_1 - 3 \times x_1 = 0,$$

ou :

$$y_1 = 3x_1.$$

Ainsi, tout point dont les coordonnées x et y sont liées par la relation $y = 3x$ est sur la droite (D) et réciproquement, tout point de (D) a des coordonnées x et y qui vérifient $y = 3x$. De ce double résultat nous concluons que le graphique de la fonction $y = 3x$ est la droite (D) qui passe par l'origine O et par le point A $(x = 1;\ y = 3)$.

104. Fonction $\mathbf{y = -\frac{x}{5}}$. On étudie cette fonction en passant par les mêmes étapes que pour la fonction précédente.

1° **Intervalle de variation.** — Le monôme $-\frac{x}{5}$ est défini pour toute valeur de x.

x	-20	-10	-5	0	5	10
y	4	2	1	0	-1	-2

2° **Sens de variation.** — Soit x_1 et x_2 deux valeurs arbitraires et distinctes de x et supposons $x_1 > x_2$. On a :

$$y_1 = -\frac{x_1}{5} \quad \text{et} \quad y_2 = -\frac{x_2}{5}.$$

De l'inégalité :

$$x_1 > x_2 \tag{1}$$

on déduit, en multipliant les deux membres par le nombre négatif $-\frac{1}{5}$ (il faut changer le sens de l'inégalité), l'inégalité :

$$-\frac{x_1}{5} < -\frac{x_2}{5}, \tag{2}$$

c'est-à-dire :

$$y_1 < y_2. \tag{3}$$

Nous dirons que la fonction y est **décroissante.** On entend, par là, que y diminue lorsque x augmente et que y augmente quand x diminue.

3° **Étude de la fonction y pour des valeurs de x très grandes en valeur absolue.**

On aura : $y = 200\,000,$

ou : $-\frac{x}{5} = 200\,000,$

si : $x = -1\,000\,000;$

comme la fonction y est décroissante on aura : $y > 200\,000$

dès que l'on aura : $x < -1\,000\,000.$

Nous dirons que y *devient infini par valeurs positives lorsque* x *devient infini par valeurs négatives.*

De même, on aura : $y = -2\,000\,000,$

ou : $-\frac{x}{5} = -2\,000\,000,$

si : $x = 10\,000\,000;$

comme la fonction y est décroissante, on aura : $y < -2\,000\,000$

dès que l'on aura : $x > 10\,000\,000.$

Nous dirons que y *devient infini par valeurs négatives, lorsque* x *devient infini par valeurs positives.*

4° **Tableau de variations.** On résume les variations par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

La flèche $\searrow$ descendant cette fois de gauche à droite indique que la fonction est décroissante.

5° **Représentation graphique.** Étudions encore la disposition de tous les points M dont les coordonnées x et y relatives à deux axes rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$ sont liées par la relation :

$$y = -\frac{x}{5}.$$

Soit A le point de coordonnées $x' = +5$ et $y' = -1$ et M le point de coordonnées x et y telles que

$$y = -\frac{x}{5}, \quad (x \neq 0).$$

L'expression $xy' - yx'$ est égale à :

$$x \times (-1) - \left(-\frac{x}{5}\right) \times 5 = -x + x = 0.$$

Les points O, A et M sont alignés (*fig. 53*).

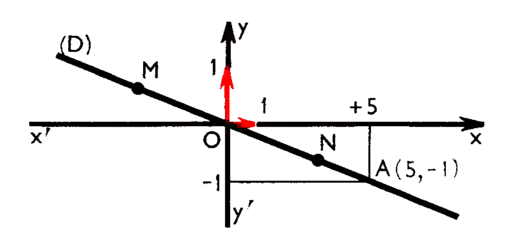


Fig. 53.

Réciproquement, soit N un point de la droite (D) passant par O et A; appelons x_1 et y_1 ses coordonnées. Puisque O, A et N sont alignés, on a la relation :

$$5\,y_1 - (-1)\,x_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad 5\,y_1 + x_1 = 0,$$

c'est-à-dire :

$$y_1 = -\frac{x_1}{5}.$$

Nous concluons que le graphique de la fonction : $y = -\dfrac{x}{5}$

est la droite (D) qui passe par l'origine et le point A de coordonnées $x = 5$ et $y = -1$.

105. Définitions. — Avant de passer au cas général d'une fonction y, de la variable x, définie par la relation :

$$y = ax$$

où a est un nombre constant (indépendant de x), nous allons énoncer quelques définitions dont des exemples ont été donnés au cours des deux études précédentes.

☆ ***1° On appelle* intervalle de variation *un intervalle à l'intérieur duquel on peut faire varier la variable* x *sans que la fonction* y *cesse d'avoir une valeur numérique.***

EXEMPLES. I. La fonction $y = \frac{x}{x-1}$ est définie dans tout intervalle ne comprenant pas la valeur $x_0 = 1$.

II. La fonction $\frac{\sqrt{1-x}}{x}$ est définie si $x \neq 0$ et si $x \leqslant 1$. Par conséquent, on peut envisager tout intervalle ne comprenant que des nombres négatifs : $x < 0$ et aussi l'intervalle des nombres compris entre 0 et 1 (0 exclu),

$$0 < x \leqslant 1.$$

☆ ***2° On dit qu'une fonction* y *de la variable* x *est* croissante *dans un intervalle où elle est définie, si l'inégalité :***

$$\mathbf{x_1 > x_2} \qquad (1)$$

où* $\mathbf{x_1}$ *et* $\mathbf{x_2}$ *désignent deux valeurs arbitraires de la variable* x *de cet intervalle, implique l'inégalité :

$$\mathbf{y_1 > y_2} \qquad (2)$$

$\mathbf{y_1}$ et $\mathbf{y_2}$ étant les valeurs de la fonction correspondant respectivement à $\mathbf{x_1}$ et à $\mathbf{x_2}$.

3° On dit qu'une fonction* y *de la variable* x *est* décroissante *dans un intervalle où elle est définie, si l'inégalité :

$$\mathbf{x_1 > x_2}$$

où* $\mathbf{x_1}$ *et* $\mathbf{x_2}$ *désignent deux valeurs arbitraires de la variable* x *de cet intervalle, implique l'inégalité :

$$\mathbf{y_1 < y_2}$$

4° Déterminer* le sens de variation *d'une fonction c'est chercher si elle est croissante ou décroissante dans un intervalle où elle est définie.

106. Fonction $y = ax$. Le nombre a désigne un nombre relatif quelconque dont la valeur ne dépend pas de celle de x. Nous avons étudié deux exemples $a = +3$ (fonction $y = 3x$) et $a = -\frac{1}{5}$ $\left(\text{fonction } y = -\frac{x}{5}\right)$.
Les calculs faits dans ces deux cas ainsi que les conclusions auxquelles on a abouti sont valables respectivement pour un nombre positif quelconque a et pour un nombre négatif quelconque a.

Nous énoncerons donc ce qui suit :

1° La fonction $y = ax$ est *définie* pour toute valeur de x.

2° $\boxed{a > 0}$ La fonction $y = ax$ est *croissante* et sa variation est indiquée par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{a < 0}$ La fonction $y = ax$ est *décroissante* et sa variation est indiquée par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3° Dans les deux cas le *graphique* est la droite qui passe par l'origine et par le point A de coordonnées : $x = +1$; $y = a$ (*fig. 54 et 55*).

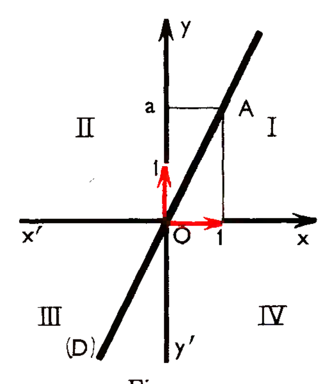


Fig. 54.
fonction $y = ax$
$a > 0$, fonction croissante, graphique dans les régions I et III

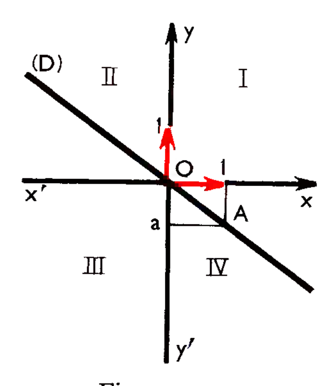


Fig. 55.
fonction $y = ax$
$a < 0$, fonction décroissante, graphique dans les régions II et IV

CAS PARTICULIER. Lorsque $a = 0$, la fonction $y = ax$ prend la valeur numérique zéro quel que soit x. On dit que la fonction y est constante. Son graphique est la droite $x'x$.

• REMARQUE. Les graphiques précédents ont été tracés en choisissant la même unité sur les deux axes. Si les unités sont différentes, le graphique est toujours une droite.

107. Coefficient de direction. — Le coefficient a du monôme ax renseigne :
1° par son *signe*, sur le sens de variation de la fonction $y = ax$;
2° par sa *valeur*, sur la position du graphique (D) de la fonction.

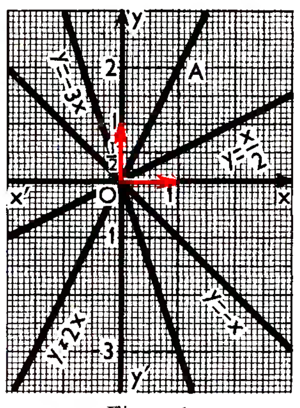


Fig. 56.

Ce coefficient qui indique la direction du graphique (D) s'appelle le **coefficient de direction** de la droite (D).

EXEMPLE. Tracer une droite passant par l'origine O et de coefficient de direction

$$a = 2.$$

On marque le point A (1, 2) et on trace la droite OA. Cette droite est le graphique de la fonction $y = 2x$.

La *figure 56* montre les droites, passant par O, et de coefficients de direction respectifs : -1, -3, $+\frac{1}{2}$.

Ces droites sont les graphiques des fonctions :

$$y = -x; \qquad y = -3x; \qquad y = \frac{x}{2}.$$

108. Construction pratique du graphique de la fonction $y = ax$. Puisque le graphique de cette fonction est une droite passant par l'origine, on construira cette droite en la faisant passer par l'origine O et par un autre point de la droite. On n'est pas obligé de choisir toujours le point d'abscisse 1 ; n'importe quel autre point M de coordonnées simples facilitera la construction.

EXEMPLES. $y = \frac{2}{3}x$. On peut prendre M ($x = 3$; $y = 2$).

$y = -\frac{3}{5}x$. On peut prendre M ($x = -5$; $y = +3$).

Il sera toujours essentiel de préciser les unités de longueur choisies sur les axes.

EXEMPLE. Soit la fonction $y = x$. Si l'on choisit la même unité de longueur sur les deux axes, le graphique, qui est la droite (D) passant par l'origine O et le point

A ($x = 1$; $y = 1$), est le support de celle des bissectrices des droites $x'x$ et $y'y$ qui traverse les régions I et III (*fig.* 57) (puisque le triangle AOP est rectangle et isocèle).

Mais si l'on ne choisit pas les mêmes unités sur les deux axes, la droite (D) n'est plus bissectrice (*fig.* 58).

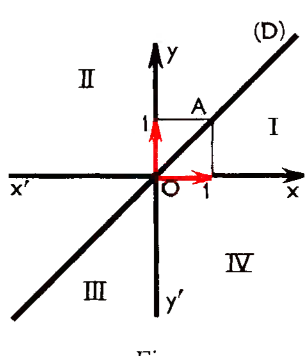


Fig. 57.

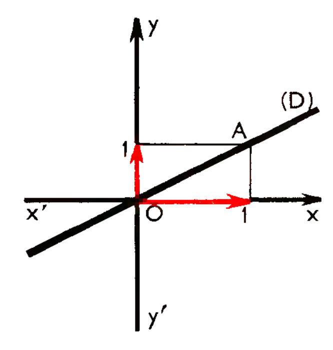


Fig. 58.

• **Applications.**

399. — *Calculer les valeurs prises par la fonction* $y = -4x$ *pour les valeurs entières de* x *de* -5 *à* $+4$. *Disposer les résultats dans un tableau de valeurs correspondantes.*

400. — *Dire, pour chacune des fonctions suivantes, le sens de sa variation (fonction croissante ou fonction décroissante) :*

$$y = -x, \quad y = \frac{x}{5}, \quad y = 3x, \quad y = \frac{-x}{3}, \quad y = \frac{4}{7}x.$$

401. — 1° *Comment faut-il choisir* x *pour que la fonction* $y = 4x$ *prenne des valeurs supérieures à* 1 000 000 ?

2° *Comment faut-il choisir* x *pour que la même fonction prenne des valeurs inférieures à* $-2\,000\,000$?

402. — *Faire une étude complète de chacune des fonctions de l'exercice* 400 *(intervalle de variation, sens de variation, étude de la fonction pour des valeurs de* x *très grandes en valeur absolue, tableau des variations, représentation graphique).*

403. — *Un triangle équilatéral* ABC *a pour côté* 5 *cm. Un point* M *se déplace sur le côté* AB *et l'on désigne par* x *la mesure en centimètres du segment* AM. *La parallèle tracée par* M *à* BC *coupe* AC *en* N. *Exprimer, en fonction de* x, *la mesure* y *en centimètres du périmètre du triangle* AMN. *Étudier la variation de la fonction* y *lorsque* M *décrit le côté* AB. (¶ Le graphique est un segment de droite dont il suffit de connaître les extrémités pour le tracer.)

404. — *Une droite passant par l'origine des coordonnées a pour coefficient de direction* -3. *Quelle est la fonction dont elle est le graphique ?*

405. — *Une droite passe par l'origine des coordonnées et par le point* A $(4, -3)$. *Quel est son coefficient de direction ?*

II. FONCTION $y = ax + b$

Travaux pratiques d'initiation.

1° Compléter le tableau ci-dessous :

x	$y_1 = 2x$	$y_2 = 2x - 3$	$y_3 = -\frac{x}{2}$	$y_4 = -\frac{x}{2} + 1$
-2	-4	-7	1	
-1	-2	-5		
0	0			
1,5				
3				

2° En prenant le cm pour unité de longueur sur deux axes de coordonnées et en employant, de préférence, du papier quadrillé au millimètre, construire les points ayant pour abscisses les valeurs données pour x et pour ordonnées les valeurs correspondantes de y_1, y_2, y_3, y_4. On fera deux figures séparées, l'une pour y_1 et y_2, l'autre pour y_3 et y_4.
On observera la disposition des points obtenus.

109. Fonction $y = 2x + 3$.

1° Intervalle de variation. Le polynome $2x + 3$ a une valeur numérique, quelle que soit la valeur donnée à x. La fonction $y = 2x + 3$ est donc définie quel que soit x. On obtient, par exemple, les valeurs suivantes :

x	-3	-2	-1	0	1
y	-3	-1	1	3	5

2° **Sens de variation.** Ce tableau fait pressentir que si l'on donne à x des valeurs qui vont en augmentant, y prend des valeurs qui vont aussi en augmentant. Démontrons-le.

Soit x_1 et x_2 deux valeurs arbitraires et distinctes données à x; on peut toujours supposer : $x_1 > x_2$.

La fonction y prend alors les valeurs respectives :

$$y_1 = 2\,x_1 + 3 \qquad \text{et} \qquad y_2 = 2\,x_2 + 3.$$

De l'inégalité :

$$x_1 > x_2, \tag{1}$$

on déduit, en multipliant les deux membres par le nombre positif 2, l'inégalité :

$$2\,x_1 > 2\,x_2, \tag{2}$$

et, en ajoutant 3 aux deux membres, l'inégalité :

$$2\,x_1 + 3 > 2\,x_2 + 3, \tag{3}$$

c'est-à-dire :

$$y_1 > y_2. \tag{4}$$

La fonction $y = 2\,x + 3$ est donc une fonction *croissante*.

3° **Étude de la fonction y pour des valeurs de x très grandes en valeur absolue.** Si nous donnons à x des valeurs positives très grandes nous obtenons, par exemple, le tableau suivant :

x	100	1 000	10 000
y	203	2 003	20 003

Cela fait pressentir que y peut prendre des valeurs positives aussi grandes que l'on voudra. Par exemple, on aura :

$$y = 1\,000\,000,$$

ou :

$$2\,x + 3 = 1\,000\,000,$$

puis :

$$2\,x = 999\,997, \quad \text{d'où :} \quad x = \frac{999\,997}{2}.$$

Comme la fonction y est une fonction croissante, on aura :

$$y > 1\,000\,000,$$

dès que l'on aura :

$$x > \frac{999\,997}{2}.$$

Nous dirons que y *devient infini par valeurs positives lorsque* x *devient infini par valeurs positives.*

De la même façon on aura : $y = -100\,000,$

ou : $2x + 3 = -100\,000,$

si : $2x = -100\,003,$ d'où : $x = -\dfrac{100\,003}{2}.$

Comme la fonction y est une fonction croissante, on aura :

$$y < -100\,000, \quad \text{dès que l'on aura :} \quad x < -\frac{100\,003}{2}.$$

Nous dirons que y *devient infini par valeurs négatives lorsque* x *devient infini par valeurs négatives.*

4° **Tableau de variations.** Nous résumons les variations de la fonction $y = 2x + 3$ par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

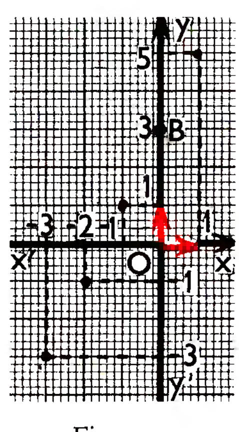


Fig. 59.

5° **Représentation graphique.** Traçons deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$. Soit M un point de coordonnées x et y liées par la relation : $y = 2x + 3$.

En donnant à x et à y les valeurs numériques consignées dans le tableau du 1°, nous pouvons marquer cinq points figuratifs. D'après la figure, ces points semblent alignés (*fig. 59*). Nous allons le démontrer.

Désignons par B le point de coordonnées $x = 0$ et $y = 3$, qui est l'un des points particuliers et par N le point ayant *même abscisse* x que M et pour ordonnée $2x$ (*fig. 60*). Nous savons (n° 106) que, lorsque x varie, ce point décrit la droite (Δ) qui passe par l'origine et par le point A (1, 2). Les points M et N, ayant même abscisse, se projettent au même point P de $x'x$ et, par suite, la droite MN est parallèle à $y'y$. La relation de Chasles donne :

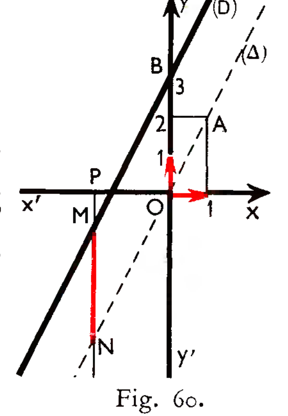


Fig. 60.

$$\overline{PM} = \overline{PN} + \overline{NM},$$

ou : $2x + 3 = 2x + \overline{NM},$

soit : $\overline{NM} = 3.$

Comme l'on a aussi $\overline{OB} = 3$, on en déduit que le quadrilatère convexe OBMN, qui a deux côtés égaux et parallèles, est un parallélogramme. Par suite, quel que soit x, le point M se trouve sur la droite (D), passant par B et parallèle à (Δ) (*fig. 60*).

Réciproquement, soit M_1 (x_1, y_1) un point de (D) se projetant en P_1, d'abscisse x_1, sur $x'x$ (*fig. 61*). Construisons le point M′ d'abscisse $x' = x_1$ et d'ordonnée $y' = 2x_1 + 3$. Nous venons de démontrer que M′ se trouve sur (D). Comme il se projette sur $x'x$ au même point P_1 que M_1, les points M_1 et M′ sont confondus et l'on a :

$$y_1 = y', \quad \text{donc :} \quad y_1 = 2x_1 + 3.$$

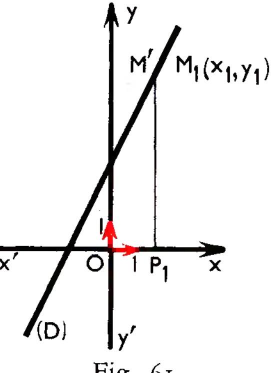


Fig. 61.

Ainsi tout point de coordonnées x et y liées par $y = 2x + 3$ est sur la droite (D) et, réciproquement, tout point de (D) a des coordonnées x et y qui vérifient la relation $y = 2x + 3$.

De ce double résultat, nous concluons que le graphique de la fonction $y = 2x + 3$ est la droite (D).

110. Fonction $y = -3x + 4$. — 1° **Intervalle de variation.** Le polynome $-3x + 4$ a une valeur numérique, quelle que soit la valeur donnée à x. La fonction $y = -3x + 4$ est *définie* quel que soit x. On obtient, par exemple, les valeurs suivantes :

x	-2	-1	0	1	2
y	10	7	4	1	-2

2° **Sens de variation.** Ce tableau fait pressentir que si l'on donne à x des valeurs qui vont en augmentant, y prend des valeurs qui vont en diminuant. Démontrons-le.

Soit x_1 et x_2 deux valeurs arbitraires et distinctes données à x; on peut toujours supposer : $x_1 > x_2$. La fonction y prend alors les valeurs respectives :

$$y_1 = -3x_1 + 4 \quad \text{et} \quad y_2 = -3x_2 + 4.$$

De l'inégalité :

$$x_1 > x_2 \tag{1}$$

on déduit, en multipliant les deux membres par le nombre négatif -3, l'inégalité :

$$-3x_1 < -3x_2, \tag{2}$$

et, en ajoutant 4 aux deux membres, l'inégalité :

$$-3x_1 + 4 < -3x_2 + 4, \qquad (3)$$

c'est-à-dire :

$$y_1 < y_2. \qquad (4)$$

La fonction $y = -3x + 4$ est donc une fonction *décroissante.*

3° **Étude de la fonction y pour des valeurs de x très grandes en valeur absolue.**

Si nous donnons à x des valeurs positives très grandes, nous obtenons, par exemple, le tableau suivant :

x	100	1 000	10 000
y	— 296	— 2 996	— 29 996

Cela fait pressentir que y peut prendre des valeurs négatives dont les valeurs absolues sont aussi grandes que l'on voudra. Par exemple, on aura :

$$y = -2\,000\,000,$$

ou :

$$-3x + 4 = -2\,000\,000,$$

si :

$$-3x = -2\,000\,004, \quad \text{d'où :} \quad x = +666\,668.$$

Comme la fonction y est une fonction décroissante, on aura :

$$y < -2\,000\,000,$$

dès que l'on aura :

$$x > 666\,668.$$

Nous dirons que y *devient infini par valeurs négatives lorsque* x *devient infini par valeurs positives.*

De la même façon, on aura :

$$y = 1\,000\,000,$$

ou :

$$-3x + 4 = 1\,000\,000,$$

si :

$$-3x = 999\,996, \quad \text{d'où :} \quad x = -333\,332.$$

Comme la fonction y est une fonction décroissante, on aura :

$$y > 1\,000\,000,$$

dès que l'on aura :

$$x < -333\,332.$$

Nous dirons que y *devient infini par valeurs positives lorsque* x *devient infini par valeurs négatives.*

4° **Tableau de variation.** Nous résumons les propriétés de la fonction $y = -3x + 4$ par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

5° **Représentation graphique.** Traçons deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Oy$ et $y'Oy$. Soit M un point de coordonnées x et y liées par la relation :
$$y = -3x + 4.$$

En donnant à x et à y les valeurs numériques consignées dans le tableau du 1° nous pouvons marquer cinq points figuratifs. D'après la *figure 62* ces points semblent alignés. Nous allons le démontrer.

Désignons par B le point de coordonnées $x = 0$ et $y = 4$, qui est l'un de ces points particuliers, et par N le point ayant même abscisse x que M et

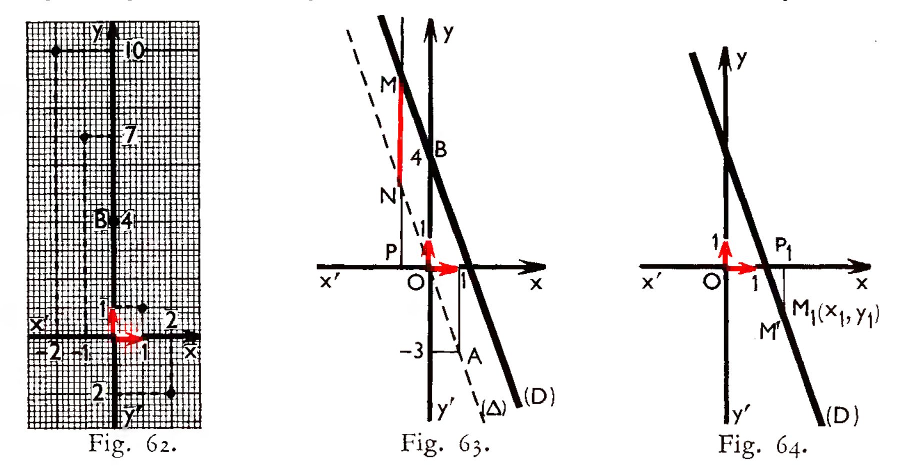


Fig. 62. Fig. 63. Fig. 64.

pour ordonnée $-3x$. Nous savons (n° 106) que, lorsque x varie, ce point décrit la droite (Δ) qui passe par l'origine et le point A (1, −3). Les points M et N, ayant même abscisse, se projettent au même point P de $x'x$ et, par suite, la droite MN est parallèle à $y'y$. La relation de Chasles donne :
$$\overline{PM} = \overline{PN} + \overline{NM},$$
ou :
$$-3x + 4 = -3x + \overline{NM},$$
soit :
$$\overline{NM} = 4.$$
Comme l'on a aussi $\overline{OB} = 4$, on en déduit que le quadrilatère convexe OBMN, qui a deux côtés opposés égaux et parallèles, est un parallélogramme. Par suite, quel que soit x, le point M se trouve sur la droite (D) passant par B et parallèle à (Δ).

Réciproquement, soit M_1 (x_1, y_1) un point de (D), se projetant en P_1, d'abscisse x_1, sur $x'x$ (*fig. 64*). Construisons le point M' d'abscisse $x' = x_1$ et d'ordonnée $y' = -3x_1 + 4$. Nous venons de démontrer que M' se trouve sur (D). Comme il se projette sur $x'x$ au même point P_1 que M_1, les points M' et M_1 sont confondus et l'on a : $y_1 = y'$, donc $y_1 = -3x_1 + 4$.

Ainsi tout point de coordonnées x et y liées par la relation $y = -3x + 4$ est sur la droite (D) et, réciproquement, tout point de (D) a des coordonnées x et y qui vérifient la relation $y = -3x + 4$.

De ce double résultat, nous concluons que le graphique de la fonction $y = -3x + 4$ est la droite (D).

111. Fonction $y = ax + b$.

1° Intervalle de variation. La fonction $y = ax + b$ est définie pour toute valeur de x.

2° Sens de variation. Dans les deux exemples précédents, le sens de la variation était différent, cela tenait à ce que le coefficient a de x était positif ($y = 2x + 3$) ou négatif ($y = -3x + 4$). On a établi que la fonction est croissante lorsque $a = +2$ (positif) et décroissante lorsque $a = -3$ (négatif). Des calculs analogues aux précédents peuvent être faits pour toute valeur positive ou pour toute valeur négative de a. Nous énoncerons donc ce qui suit :

- THÉORÈME. — ***La fonction* y = ax + b *est :***
  croissante si* a *est positif;
  décroissante si* a *est négatif.

3° Étude de y pour les valeurs de x très grandes en valeur absolue. Le comportement de la fonction est résumé par le tableau suivant.

4° Tableau de variations.

	x	$-\infty$		$+\infty$
$y = ax + b$	$a > 0$	$-\infty$	↗	$+\infty$
	$a < 0$	$+\infty$	↘	$-\infty$

5° Représentation graphique. Dans les deux cas, le graphique de la fonction $y = ax + b$ est une droite (D). Elle passe par le point d'ordonnée b situé sur $y'y$ et elle est parallèle à la droite (Δ) qui représente graphiquement la fonction $y = ax$.

- THÉORÈME. — ***Le graphique de la fonction* y = ax + b *est une droite.***

CAS PARTICULIER. Si $a = 0$, on a alors : $y = 0x + b$

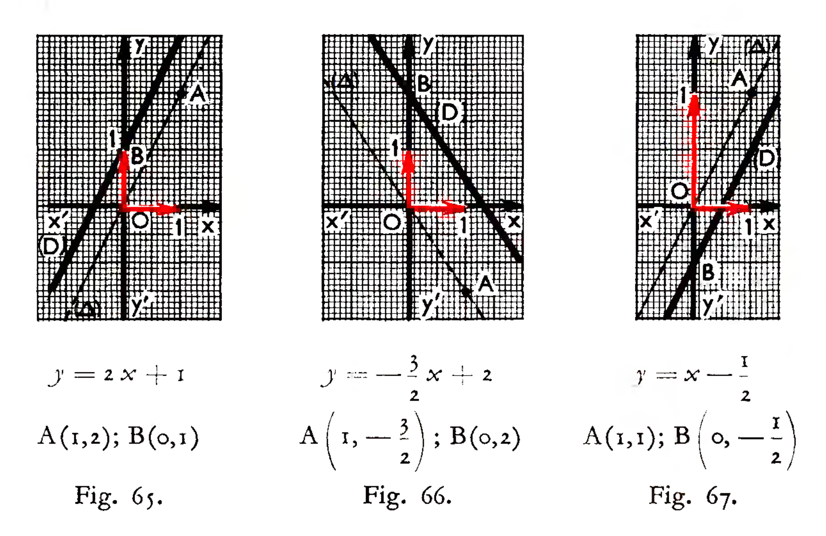
ou : $y = b$.

Quel que soit x, y prend la même valeur b. On dit que la fonction est *constante*.

112. Construction pratique du graphique de la fonction $y = \underline{ax} + b$. — 1° Si $a = 0$, il suffit de marquer le point B de $y'y$ défini par $\overline{OB} = b$; le graphique cherché est la droite passant par B et perpendiculaire à $y'y$.

2° Si $a \neq 0$, on peut opérer de différentes façons.

En suivant le principe de la démonstration, on construit d'abord le graphique (Δ) de la fonction $y = ax$ et on trace par le point B, d'ordonnée b sur $y'y$, la parallèle (D) à (Δ). Rappelons que le graphique (Δ) est la droite passant par l'origine O et par le point A (1, a).



$y = 2x + 1$ — A(1,2); B(0,1) — Fig. 65.

$y = -\frac{3}{2}x + 2$ — A$\left(1, -\frac{3}{2}\right)$; B(0,2) — Fig. 66.

$y = x - \frac{1}{2}$ — A(1,1); B$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ — Fig. 67.

NOTATIONS. Les coefficients a et b du binome $y = ax + b$ portent des noms particuliers :

a est le *coefficient de direction de la droite* (D),
b est l'*ordonnée à l'origine de la droite* (D).

• REMARQUE. Soit deux binomes :

$$y = ax + b$$
$$y_1 = ax + b_1 \qquad (b \neq b_1).$$

Les droites (Δ) associées sont confondues. Les graphiques (D) et (D_1) des deux binomes sont donc des droites parallèles.

Par exemple, les graphiques des fonctions :

$$y = x; \quad y = x - 1; \quad y = x + 2$$

sont des droites parallèles (*fig. 68*).

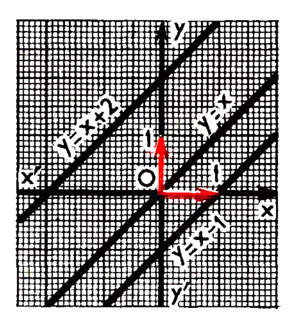
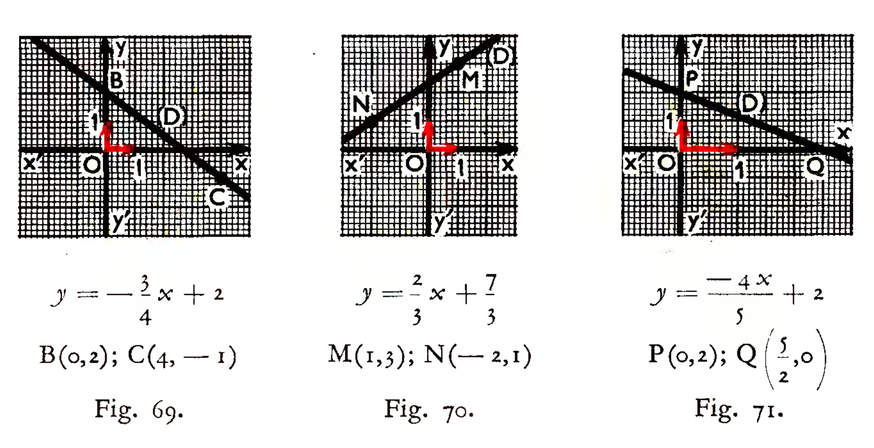


Fig. 68.

Généralement, on n'utilise pas la droite (Δ), car cela oblige à construire deux droites alors que l'une des deux seulement représente la fonction.

Puisque le graphique cherché est une droite, il suffit pour tracer cette droite d'en connaître deux points. A cet effet, on donne à x deux valeurs distinctes et on calcule les valeurs correspondantes de y. En pratique, on choisira pour x des valeurs qui conduisent à des calculs simples (*fig. 69, 70, 71*).



$y = -\frac{3}{4}x + 2$ B(0,2); C(4, — 1) Fig. 69.

$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ M(1,3); N(— 2,1) Fig. 70.

$y = \frac{-4x}{5} + 2$ P(0,2); Q$\left(\frac{5}{2},0\right)$ Fig. 71.

Dans l'exemple III on a utilisé les points où la droite coupe les axes. On obtient l'abscisse du point de la droite situé sur $x'x$ en résolvant l'équation : $-\frac{4}{5}x + 2 = 0$.

113. Réciproque. — Nous venons de voir que le graphique de la fonction $y = ax + b$ est une droite. Réciproquement, traçons deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$ et, dans leur plan, une droite (D) quelconque.

1° Si la droite (D) est perpendiculaire à $x'x$ qu'elle coupe en un point P d'abscisse h, tout point M (x, y) de (D) a pour abscisse $x = h$ et son ordonnée y est arbitraire (*fig. 72*). La droite (D) n'est donc pas le graphique d'une fonction y de x puisque la connaissance de x ne détermine pas celle de y.

2° Si la droite (D) est perpendiculaire à $y'y$ qu'elle coupe en un point B d'ordonnée b, tout point M (x, y) de (D) a pour ordonnée $y = b$ et son abscisse x est arbitraire (*fig. 73*). La droite (D) est donc le graphique de la fonction :

$$y = b.$$

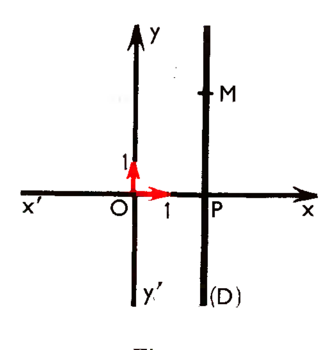


Fig. 72.

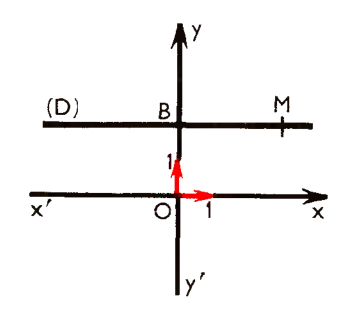


Fig. 73.

3° Supposons enfin que la droite (D) quelconque coupe l'axe $y'y$ en B d'ordonnée b (*fig. 74*). Traçons par O la droite (Δ) parallèle à (D) et marquons sur (Δ) le point A d'abscisse $x_0 = +1$. Soit a l'ordonnée de A. On sait alors que (Δ) est le graphique de la fonction :

$$y = ax$$

et que (D) est le graphique de la fonction :

$$y = ax + b.$$

Nous énoncerons :

▪ THÉORÈME. — ***Toute droite (D), tracée dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires x'Ox et y'Oy, est le graphique d'une fonction : y = ax + b, sauf si cette droite est perpendiculaire à l'axe x'x.***

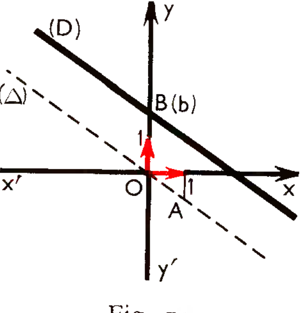


Fig. 74.

● REMARQUE. La détermination des coefficients a et b connaissant les ordonnées de deux points M_1 (x_1, y_1) et M_2 (x_2, y_2) de (D) sera étudiée ultérieurement (chapitre X).

● **Applications.**

406. — *Calculer les valeurs prises par la fonction* $y = 2x - 1$ *pour les valeurs entières de* x *de* -4 *à* $+6$. *Disposer les résultats dans un tableau de valeurs correspondantes.*

407. — *Mettre la fonction* $y = \frac{-x + 5}{3}$ *sous la forme* $y = ax + b$. *Quelles sont les valeurs de* a *et de* b ?

408. — *Dire pour chacune des fonctions suivantes le sens de sa variation (croissante, décroissante ou constante) :*

$y = -x + 4$, $y = 5x + 2$, $y = 2 - x$, $y = 2$,
$y = 3x$, $y = 4 - 5x$, $y = 4x - 5$, $y = -5$,
$y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $y = 4 - \frac{x}{5}$, $y = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{x}{8}$.

409. — *Peut-on choisir la constante* b *pour que la fonction* $y = \frac{2}{3}x + b$ *soit décroissante ?*

410. — *Comment faut-il choisir le coefficient* a *pour que la fonction* $y = ax + 4$ *soit constante ?*

411. — *Démontrer que la fonction* $y = 3x + 2$ *est croissante en donnant à* x *deux valeurs* x_1, x_2 *telles que* $x_1 > x_2$.

412. — 1° *Pour quelle valeur de* x *la fonction* $y = 2x - 5$ *a-t-elle la valeur* — 100 000 ?
2° *Comment faut-il choisir* x *pour que la fonction prenne des valeurs inférieures à* — 100 000 ?

413. — *Comment faut-il choisir* x *pour que la fonction* $y = -\frac{x}{2} + 3$ *prenne la valeur* 10^6 ? *pour qu'elle prenne des valeurs supérieures à* 10^6 ?

414. — *Faire une étude complète de chacune des fonctions suivantes (sens de variation, graphique) :*

1° $y = -x + 4$; $y = 5x + 2$;
2° $y = 2 - x$; $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$.

415. — *Un triangle équilatéral* ABC *a pour côté* 5 *cm. Un point* M *est variable sur le côté* AB *et l'on désigne par* x *la mesure en centimètres du segment* AM. *La parallèle tracée par* M *à* BC *coupe* AC *en* N. *Exprimer en fonction de* x *la mesure* y *en centimètres du périmètre du trapèze* BMNC. *Étudier la variation de* y *lorsque* M *décrit le côté* AB.

416. — *Une droite a pour coefficient de direction* — 2 *et pour ordonnée à l'origine* — 3. *Quelle est la fonction dont elle est le graphique ?*

417. — *Quelles sont les coordonnées des points de rencontre avec les axes des graphiques des fonctions :* $y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}$ *et* $y = \frac{7}{4}x - 3$?

418. — *Construire le graphique* (D) *de la fonction :* $y = -2x + 1$. *Quelle est la fonction dont le graphique est la droite* (D′) *parallèle à* (D) *et qui coupe* y′Oy *au point d'ordonnée* — 3 ?

III. MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

Travaux pratiques d'initiation.

Qu'est-ce qu'un mobile? une trajectoire? Avez-vous vu au cinéma des trajectoires de mobiles?
On peut imaginer un appareil à mesurer le temps dans lequel une aiguille mue par un mécanisme d'horlogerie se déplacerait sur un axe, sa pointe indiquant l'heure (*fig.* 75). L'heure initiale serait, une fois pour toutes, marquée O; l'axe serait gradué d'heure en heure.

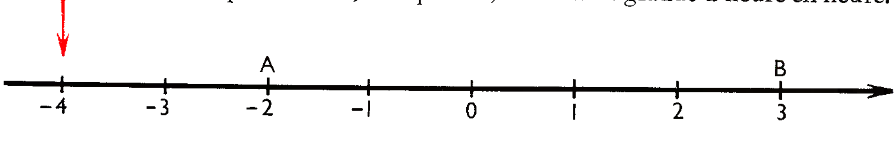


Fig. 75.

Il y aurait des heures positives (après O) et négatives (avant O).
Si la pointe se déplace de A à B, la durée de ce déplacement est la mesure, en heures, du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On peut appliquer la formule de Chasles :

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

Si l'on désigne par h_1 l'heure lors de la position A_1 de l'aiguille et par h_2 l'heure lors de la position A_2, on aura (*fig.* 76) :

$$\overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1}$$
$$= h_2 - h_1.$$

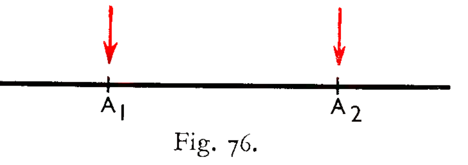


Fig. 76.

Une durée se mesure comme un vecteur : différence entre l'heure de la fin de l'événement et l'heure du début de l'événement étudié.

114. Loi horaire d'un mouvement rectiligne. — Soit un axe $x'x$ sur lequel nous avons choisi :

1° *un sens positif* indiqué par la flèche,

2° *un point initial* (ou origine) O,

3° *une unité de longueur*.

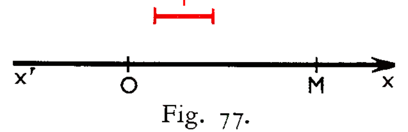


Fig. 77.

Tout point M de l'axe est alors repéré par son abscisse :

$$x = \overline{OM}.$$

Imaginons que le point M se déplace sur l'axe. On dit alors que M est un *mobile*. La droite $x'x$ est appelée sa *trajectoire*. Pour mesurer le temps, nous savons qu'il faut choisir :

4° *une origine des temps,*
5° *une unité de durée.*

Cette unité de durée est l'une des unités courantes :

seconde (s); minute (mn), heure (h) ou jour ou année, etc.

Quant au sens positif des temps c'est toujours le sens du passé vers l'avenir. Chaque instant est alors repéré par un nombre relatif t appelé *date*. Par exemple, on dira qu'à la date $t = -1$ le mobile M a pour abscisse $x = +3$.

Si à la date t correspond une valeur de x, x est une fonction de t.

☆ DÉFINITIONS. — ***La relation qui fait correspondre l'abscisse x à la date t est appelée* loi horaire *du mouvement.***
La partie de l'axe x'x sur laquelle se déplace le mobile est appelée* trajectoire *du mobile.

Rappelons qu'une loi horaire exige que les 5 choix indiqués plus haut aient préalablement été faits :

1° sens positif sur la trajectoire;
2° point initial sur la trajectoire (ou origine des abscisses);
3° unité de longueur sur la trajectoire;
4° origine des temps ou date initiale;
5° unité de durée.

EXEMPLES. I. $x = -2t + 3$ permet de calculer x connaissant t

t	-3	-1	0	2	seconde
x	9	5	3	-1	cm

II. $$x = \frac{t^2}{4}$$

t	-4	-2	0	2	mn
x	4	1	0	1	cm

On voit, sur cet exemple, qu'à deux dates différentes $t' = -2$ et $t'' = +2$ le point M a la même position $x = +1$.

115. Mouvement rectiligne uniforme. — ☆ DÉFINITION. ***On dit qu'un mobile est animé d'un*** **mouvement rectiligne uniforme** ***lorsque :***
1° le mobile se déplace sur une droite;
2° la loi horaire est de la forme :

$$\mathbf{x = at + b}, \qquad (1)$$

a ***et*** **b** ***étant des nombres relatifs, indépendants de*** **t**, ***le nombre*** **a** ***n'étant pas nul.***

La fonction :

$$x = at + b \qquad (1)$$

a été étudiée. Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants :

1° Si $a > 0$, x est une fonction croissante. Le mobile M se déplace constamment dans le sens positif de l'axe.

2° Si $a < 0$, x est une fonction décroissante. Le mobile M se déplace constamment dans le sens négatif de l'axe.

Le cas $a = 0$ est écarté dans la définition du mouvement rectiligne uniforme. En effet, on aurait alors $x = b$, le point M serait immobile; il n'y aurait pas de mouvement proprement dit. Toutefois, ce cas est parfois envisagé; par exemple, on peut étudier le mouvement d'un train en tenant compte de ses arrêts dans des gares.

▪ THÉORÈME. — ***Un mobile, animé d'un mouvement rectiligne uniforme défini par la loi horaire :*** **x = at + b**, ***se déplace dans le sens positif de l'axe si le coefficient*** **a** ***est positif et il se déplace dans le sens négatif si le coefficient*** **a** ***est négatif.***

116. Vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme. — Soit deux dates distinctes t_1 et t_2. Le mobile M occupe deux positions M_1 et M_2 repérées par leurs abscisses respectives x_1 et x_2 (*fig. 78*) :

$$x_1 = at_1 + b,$$
$$x_2 = at_2 + b.$$

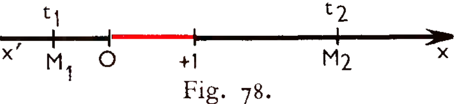


Fig. 78.

La mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est :

$$\overline{M_1M_2} = x_2 - x_1 = (at_2 + b) - (at_1 + b),$$

$$\overline{M_1M_2} = a\,(t_2 - t_1). \qquad (2)$$

La durée du déplacement est : $t_2 - t_1$. L'égalité (2) montre que les nombres $\overline{M_1M_2}$ et $t_2 - t_1$ sont proportionnels.

▪ THÉORÈME. — ***Lorsqu'un mobile M est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, la mesure algébrique $\overline{M_1M_2}$ du vecteur dont les extrémités M_1 et M_2 sont atteintes respectivement aux dates t_1 et t_2 est proportionnelle à la durée $t_2 - t_1$ du déplacement correspondant.***

On dit, en abrégé, que la distance parcourue est proportionnelle à la durée correspondante du parcours.

Réciproquement, supposons qu'un mobile M se déplace sur l'axe $x'x$, de façon que la mesure algébrique $\overline{M_0M}$ de tout vecteur dont les extrémités M_0 et M sont atteintes respectivement aux dates t_0 et t soit proportionnelle à la durée $t - t_0$ du déplacement correspondant. Appelons a le coefficient de proportionnalité. Nous obtenons (*fig.* 79) :

Fig. 79.

$$x - x_0 = a\,(t - t_0),$$

ou :

$$x = a\,(t - t_0) + x_0,$$

$$x = at + (x_0 - at_0).$$

Le nombre $(x_0 - at_0)$ est indépendant de t. Posons :

$$x_0 - at_0 = b.$$

Nous obtenons :

$$x = at + b.$$

Nous en concluons que le mouvement est rectiligne uniforme.

▪ RÉCIPROQUE.— ***Si un mobile M se déplace sur un axe de façon que la mesure algébrique $\overline{M_1M_2}$ de tout vecteur dont les extrémités M_1 et M_2 sont atteintes respectivement aux dates t_1 et t_2 est proportionnelle à la durée $t_2 - t_1$ du déplacement correspondant, le point M est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.***

Le coefficient de proportionnalité porte un nom spécial. On l'appelle *vitesse* du mouvement rectiligne uniforme. On a :

$$a = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

☆ DÉFINITION. — ***On appelle* vitesse *du mouvement rectiligne uniforme le nombre relatif constant* $\frac{\overline{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$, *le mobile passant en* M_1 *et* M_2 *aux dates respectives* t_1 *et* t_2.**

On désigne souvent cette vitesse par v et l'on écrit :

$$\boxed{v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}} \qquad (3)$$

117. Calcul de la vitesse. — Si l'on fait en sorte que la durée $t_2 - t_1$ soit égale à l'unité de temps :

$$t_2 - t_1 = 1,$$

on obtient alors :

$$v = x_2 - x_1,$$

et l'on énonce :

▪ THÉORÈME. — ***La vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme est égale à la mesure algébrique*** $\overline{M_1M_2}$ ***du vecteur dont les extrémités*** M_1 ***et*** M_2 ***ont été atteintes aux dates respectives*** t_1 ***et*** t_2 ***telles que*** $t_2 - t_1 = +1$.

On aura, en particulier, $v = 1$ si $x_2 - x_1 = 1$. On définit, ainsi, l'unité de vitesse.

☆ DÉFINITION. — **L'unité de vitesse *est la vitesse d'un mobile, animé d'un mouvement rectiligne uniforme, qui parcourt l'unité de longueur pendant l'unité de durée.***

Cette unité dépend donc à la fois de l'unité de longueur et de l'unité de durée.

Si l'on choisit le centimètre et la seconde, on évalue la vitesse en centimètres par seconde : abréviation cm/s. Par exemple, $v = 5$ cm/s.

Si l'on choisit le kilomètre et l'heure, on évalue la vitesse en kilomètres par heure : abréviation km/h. Par exemple, $v = 60$ km/h.

118. Changement d'unités. — Supposons qu'un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme ait une vitesse $v = 15$ m/s. Évaluons sa vitesse en kilomètres par heure.

Le mobile parcourant 15 mètres en une seconde, il parcourt :

$$(15 \times 60 \times 60)\ \text{m} = 54\,000\ \text{m}$$

en une heure.

Or : $$54\,000\ \text{m} = 54\ \text{km}.$$

La vitesse v s'évalue donc avec les nouvelles unités par :

$$v = 54\ \text{km}/h.$$

119. Formes particulières de la loi horaire. — Reprenons la loi générale :

$$x = at + b. \qquad (1)$$

Nous venons de voir que le coefficient a, vitesse du mouvement, se désigne par la notation v; nous écrirons donc : $a = v$.

Dans la formule (1) faisons $t = 0$. L'abscisse x prend alors la valeur particulière :

$$x_0 = b.$$

La loi horaire s'écrit alors :

$$\boxed{\boldsymbol{x = vt + x_0}} \qquad (4)$$

Ainsi, les coefficients a et b de la formule (1) ont des interprétations commodes :

a est la vitesse v du mobile,

b est l'abscisse x_0 du mobile à la date initiale $t = 0$.

EXEMPLE. Soit un mobile M qui se déplace sur $x'x$ avec une vitesse de -4. Si, à la date $t = 0$, il a une abscisse égale à $+5$, son abscisse x est donnée en fonction de t par :

$$x = -4t + 5.$$

Si on convient alors de prendre pour point initial O (origine des abscisses) la position du mobile à la date initiale $t = 0$, on aura $x_0 = 0$ et la formule (4) prend la forme simplifiée

$$\boxed{\boldsymbol{x = vt}} \qquad (5)$$

▪ THÉORÈME. — ***Si un mobile, animé d'un mouvement rectiligne uniforme, passe à la date initiale* t = 0 *à l'origine des abscisses, son abscisse* x *à une date* t *quelconque est donnée par :***

$$\mathbf{x = vt},$$

où* v *désigne la vitesse.

120. Exemples de mouvements rectilignes uniformes. — 1° Sur une courte distance, on peut considérer que le mouvement d'un piéton, se déplaçant sur une route droite, est rectiligne et uniforme. Supposons que ce piéton parcourt 5 km en une heure. Si l'on prend pour point initial son point de départ et pour origine des temps l'heure à laquelle il se met en marche, la distance x qu'il parcourt en un temps t est donnée par la formule :

$$x = 5\,t,$$

où x est évalué en km et t en heures.

Mais, naturellement, cette formule n'est pas valable pour de grandes valeurs de t, car, au cours de sa promenade, le piéton peut ralentir ou accélérer son allure.

2° On ferait des observations analogues pour un cycliste dont l'allure n'est régulière que pendant une durée assez courte.

3° On traite couramment le cas d'automobiles ou de trains bien que les trajectoires ne soient pas rectilignes et bien que, réellement, le mouvement ne soit pas uniforme : il y a une durée d'accélération pendant laquelle le mobile atteint une vitesse normale et une durée de ralentissement pendant laquelle le mobile, pour diverses raisons, est obligé de ralentir son allure. C'est donc pour des raisons de simplification que l'on considère de tels mouvements comme des mouvements rectilignes et uniformes. On obtiendra ainsi des approximations de mouvements réels, mais ces approximations sont souvent suffisantes pour les cas envisagés.

121. Représentation graphique. — Nous savons tracer le graphique d'une fonction du premier degré à une variable. Nous allons donc pouvoir représenter graphiquement un mouvement rectiligne et uniforme.

Traçons deux axes de coordonnées rectangulaires $t'Ot$ et $x'Ox$; sur $x'x$, nous porterons les abscisses x, avec une unité choisie et, sur $t't$ les dates t, avec aussi une certaine unité. Le graphique de la fonction :

$$x = at + b$$

est alors une droite que nous avons appris à construire. Rappelons que la détermination de deux points particuliers est commode.

• Remarque. Il est essentiel de remarquer que le mobile se déplace sur l'axe $x'x$ et non pas sur la droite (D). Ainsi le point M de la droite (D) (*fig. 80*) indique que le mobile est en P d'abscisse $x = 3$ à la date $t = 1$.

EXEMPLES.

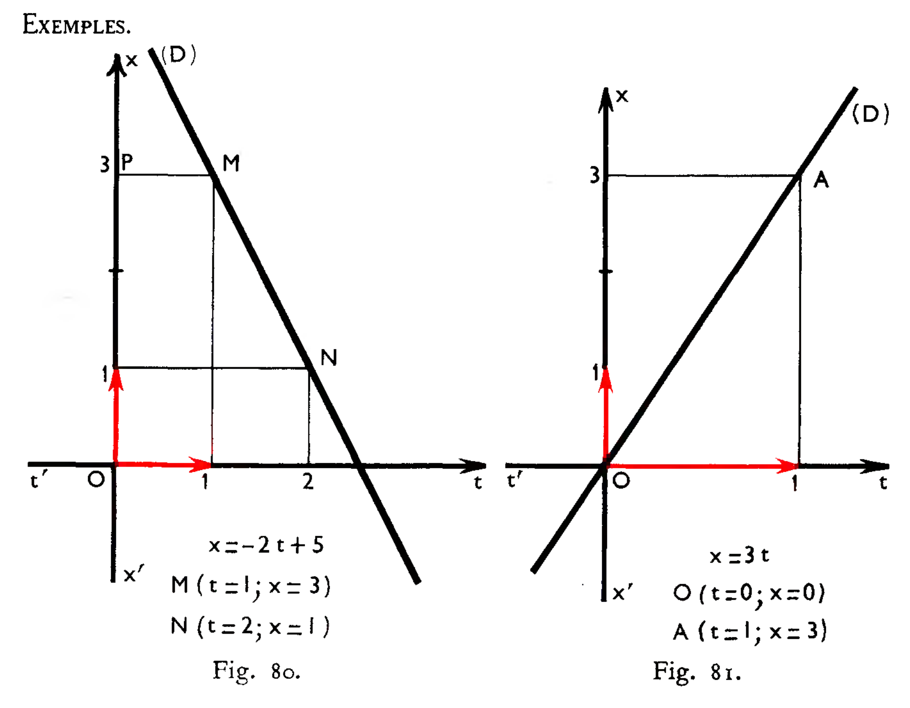


Fig. 80. Fig. 81.

122. Problème. — *Deux localités A et B sont distantes de 50 kilomètres. A 8 heures, une automobile part de A, elle arrive à B à 8 h 50 mn, s'y arrête 1 heure et revient à la même vitesse qu'à l'aller. A 8 h 30 mn, un cycliste part de B pour A en faisant 15 kilomètres à l'heure. Étudier les croisements du cycliste et de l'automobile (les mouvements sont supposés uniformes).*

1° **Solution graphique.** C'est par la solution graphique que nous commencerons, car elle donnera une idée approximative de la solution.

Le trajet de l'automobile est figuré par AMNP (*fig. 82*). AM est le graphique de l'aller de A à B (M : 8 h 50 mn; 50 kilomètres). MN est le graphique de l'arrêt en B (1 heure); NP est le graphique du retour vers A ($nP = Am$).

Le graphique du cycliste est figuré par CD. Le point C représente le départ de B à 8 h 30 mn; la direction de la droite CD est donnée par la construction du point E, représentant la position du cycliste après 2 heures de marche à 15 kilomètres à l'heure.

Le graphique montre qu'il y a deux croisements, dont les dates et les positions sont approximativement déterminées.

I : 8 h 45 mn, 46 km; K : 10 h 15 mn, 23 km.

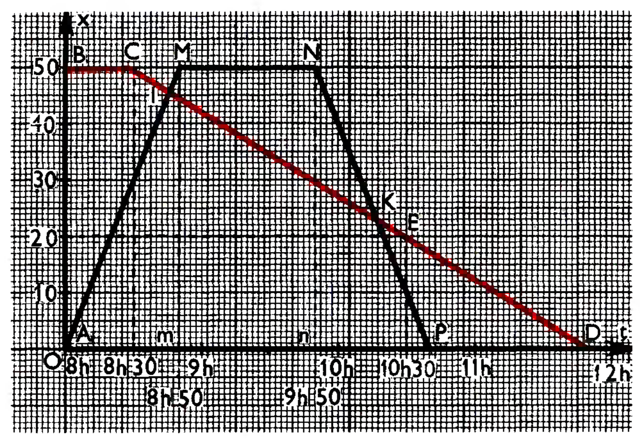


Fig. 82.

2° **Solution algébrique.** Prenons pour sens positif le sens de A vers B, pour point initial le point A, pour unité de longueur le kilomètre, pour origine des temps l'heure du départ (8 h) de l'auto de A, pour unité de durée l'heure (*fig. 83*).

Notons que l'automobile parcourant 50 km en 50 mn, parcourt 1 km en 1 mn donc 60 km en une heure. Quand elle va de A vers B, sa vitesse est + 60 km/h; quand elle va de B vers A, sa vitesse est — 60 km/h. La vitesse du cycliste est toujours — 15 km/h.

Croisement en I. De A vers B la loi horaire de l'automobile est :

(1) $$x = 60\,t.$$

La loi horaire du cycliste est :

(2) $$x = -\,15\,t + b,$$

x′ O A B x

Fig. 83.

b étant déterminé par la condition qu'à $t = \frac{1}{2}$, on a $x = 50$.

D'où : $$50 = -\frac{15}{2} + b; \qquad b = 50 + \frac{15}{2},$$

soit :

(2) $$x = -\,15\,t + 57{,}5.$$

En égalant les abscisses, on obtient :

$$60\,t = -\,15\,t + 57{,}5, \qquad \text{ou :} \qquad 75\,t = 57{,}5.$$

En divisant par 25 les deux membres :

$$3\,t = 2{,}3, \qquad \text{d'où :} \qquad t = \frac{23}{30} = \frac{46}{60} \text{ heure} = 46 \text{ mn}.$$

On en déduit : $$x = 60 \times \frac{46}{60} = 46 \text{ km.}$$

Le premier croisement a lieu à 8 h 46 mn et à 46 km de A.

Croisement en K. De B vers A, la loi horaire de l'automobile est :

(3) $$x = -60\,t + c,$$

c étant déterminé par la condition qu'à $t = 1$ h 50 mn $= \frac{11}{6}$ h, on ait : $x = 50$,

d'où : $$50 = -60 \times \frac{11}{6} + c = -110 + c; \qquad c = 160,$$

soit :

(3) $$x = -60\,t + 160.$$

En égalant les abscisses (formules 2 et 3), on obtient :

$$-15\,t + 57{,}5 = -60\,t + 160,$$

$$45\,t = 102{,}5,$$

$$t = \frac{102{,}5}{45} = \frac{205}{90} = \frac{41}{18} = 2 + \frac{5}{18}.$$

Or $\frac{5}{18}$ heure = 16 mn 40 s.

Le croisement en K a donc lieu à 10 h 16 mn 40 s,

et à $$-60 \times \frac{41}{18} + 160 = \frac{70}{3} = \left(23 + \frac{1}{3}\right) \text{ km de A.}$$

• **Comparaisons des résultats.** Le calcul semble plus précis que le graphique. *C'est une précision illusoire;* le mouvement de l'auto et celui du cycliste ne sont qu'approximativement uniformes : l'auto doit ralentir au moins aux croisements de routes.... Pratiquement, le graphique, quand il est bien fait, est aussi précis que le calcul. C'est ainsi que les réseaux de chemins de fer se servent de graphiques pour représenter la marche des trains sur une voie ferrée et résoudre des questions relatives au trafic sur une ligne donnée.

• **Applications.**

419. — *Exprimer en mètres par minute une vitesse de* 30 *km par heure, de* 30 *m par seconde.*

420. — *Écrire la loi horaire d'un mouvement rectiligne uniforme, sachant que le mobile passe au point initial à l'instant initial et qu'il se dirige dans le sens positif, la valeur absolue de la vitesse étant* 6 *m par seconde.* (*Unité de longueur :* m; *unité de temps :* s.)

421. — *Écrire la loi horaire d'un mouvement rectiligne uniforme, sachant que le mobile passe au point initial à l'instant initial et qu'il se dirige dans le sens négatif, la valeur absolue de la vitesse étant* 15 *cm par minute.* (*Unité de longueur :* cm; *unité de temps :* mn.)

422. — *1° Écrire la loi horaire d'un mouvement rectiligne uniforme, sachant qu'à l'instant initial son abscisse est* $+2$ *et que sa vitesse est* -3.

2° Même exercice l'abscisse à l'instant initial étant -1 *et la vitesse* $+5$.

423. — *Un mouvement rectiligne uniforme a pour loi horaire* $x = 4t - 2$.

1° Dans quel sens se fait le mouvement ?

2° Quelle est sa vitesse ?

3° Quelle est l'abscisse du mobile à la date initiale ? à la date $t = -1$?

4° Quelle est la date où le mobile passe au point initial de sa trajectoire ?

424. — *Deux mobiles se déplacent sur une même trajectoire rectiligne et leurs lois horaires sont respectivement* $x = 2t - 1$ $\quad x = -5t + 6$.

1° Calculer la date où ces mobiles ont la même abscisse.

2° Trouver l'abscisse du point où les mobiles se rencontrent ?

3° Les mobiles se croisent-ils ou bien l'un dépasse-t-il l'autre à l'instant où ils se rencontrent ?

EXERCICES ET PROBLÈMES



425. — Étudier les fonctions suivantes et, pour chacune, construire son graphique :

1° $y = -2x$; 2° $y = \frac{5}{4}x$; 3° $y = -\frac{x}{2}$.

4° $y = 2x + 3$; 5° $y = 2 - \frac{x}{2}$; 6° $y = \frac{3x - 5}{3}$.

426. — Une droite a pour coefficient de direction 3 et elle coupe l'axe des x au point A d'abscisse -2. Quelle est la fonction dont elle est le graphique ? (¶ *Cette fonction est de la forme* $y = 3x + b$ *et l'on peut déterminer* b *en écrivant que le point* A *est sur la droite, c'est-à-dire que ses coordonnées vérifient la relation* $y = 3x + b$).

427. — 1° Construire, par rapport aux mêmes axes, les droites (D_1) et (D_2) représentant respectivement les variations des fonctions :

$$y = \frac{2}{3}x; \qquad y = \frac{3}{2}x - 10.$$

2° La droite (D_3) représentant la fonction $y = 2$ coupe (D_1) en B et (D_2) en C. Déterminer les coordonnées de B et C.

Les deux fonctions écrites sur une même ligne seront représentées par des droites construites sur les mêmes axes; donner les particularités relatives à ces droites, et déterminer leurs points d'intersection avec les axes.

428. $y = x + 3$; $\quad y = -x - 3$.

429. $y = 2x - 1$; $\quad y = 2x + 1$.

430. $y = 3x + 2$; $\quad y = 3x - 2$.

431. $y = 4 - x$; $\quad y = 4 + x$.

432. $y = -\frac{x}{3} + 1$; $\quad y = -\frac{x}{3} - 1$.

433. — 1° Quelle est l'ordonnée à l'origine de la droite graphique de la fonction $y = 2x - 3$?

2° Même question pour la fonction $y = ax - 3$.

3° Que peut-on en conclure pour les droites que l'on obtient en donnant différentes valeurs au coefficient a du 2°?

434. — 1° Étant donné deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$, sur lesquels on choisit le centimètre comme unité, construire la courbe représentative de la fonction $y = 2x - 6$.

2° Construire le point A de cette courbe d'abscisse 5 et calculer son ordonnée. Construire le point B de cette courbe d'ordonnée -1 et calculer son abscisse.

(B. E. P. C.).

435. — Déterminer la loi horaire d'un mouvement rectiligne uniforme avec les données suivantes :

1° à la date 0, l'abscisse est 0; la vitesse est $+5$;
2° à la date 2, l'abscisse est $+4$; à la date 0, l'abscisse est 0;
3° à la date 4, l'abscisse est $+20$; la vitesse est -5;
4° à la date 2, l'abscisse est -20; la vitesse est $+5$.

436. — Un train quitte une ville A à 8 h; il passe dans une ville B située à 80 km de A à 9 h et il s'arrête dans une ville C située à 120 km de A.

1° En supposant sa vitesse constante, à quelle heure le train arrive-t-il en C?

2° Écrire la loi horaire du train en désignant par x son abscisse en kilomètres, le point initial étant B, la trajectoire étant orientée de A vers C, la date initiale étant celle du passage en B, la date t étant exprimée en heures.

437. — Le train 2 « Le Mistral » quitte Valence à 17 h 36 mn et arrive à Lyon-Perrache à 18 h 40 mn. La distance des deux gares est 105 km. En désignant par x la distance en kilomètres parcourue par ce train depuis Valence et par t le nombre qui, en heures, donne l'heure légale, déterminer la loi horaire du mouvement (supposé uniforme).



Problème résolu. — Soit les deux fonctions :

$$y = 2x - 3 \quad \text{et} \quad y = -2x + 9.$$

1° Représenter graphiquement les variations de ces fonctions par rapport aux mêmes axes de coordonnées.

2° Calculer les coordonnées du point M, intersection des deux droites ainsi obtenues, et vérifier sur le graphique.

(B. E. P. C.).

SOLUTION.

1° *Les fonctions :*

$$y = 2x - 3,$$
$$y = -2x + 9,$$

sont de la forme $y = ax + b$. *La première, pour laquelle* $a > 0$, *est croissante; la seconde pour laquelle* $a < 0$, *est décroissante. Chacune a pour courbe représentative une droite. La droite représentative de la première fonction passe par les points* A ($x = 0$, $y = -3$) *et* B ($x = 2$, $y = 1$); *la droite représentative de la seconde fonction passe par les points* C ($x = 0$, $y = 9$) *et* D ($x = 2$, $y = 5$). *Nous obtenons ainsi les graphiques ci-dessous (fig. 84).*

2° *Le point* M *commun aux droites* AB *et* CD *a pour abscisse une valeur de* x *pour laquelle les fonctions* y *prennent la même valeur numérique, qui n'est autre que l'ordonnée de* M. *L'abscisse de* M *est donc racine de l'équation suivante :*

$$2x - 3 = -2x + 9.$$

Résolvons cette équation :

$$2x + 2x = 9 + 3,$$
$$4x = 12,$$
$$x = \frac{12}{4} = 3.$$

L'abscisse de M *est donc* $x = 3$; *l'ordonnée de* M *est :*

$$y = 2x - 3 = 6 - 3 = 3,$$

ou :

$$y = -2x + 9 = -6 + 9 = 3.$$

On peut vérifier sur le graphique que le point M *a pour coordonnées* $x = 3$, $y = 3$.

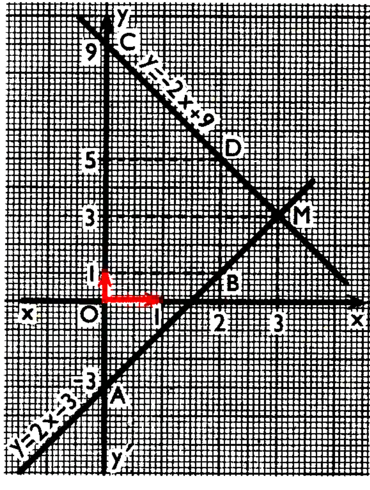


Fig. 84.

438. — Dans un plan, on trace deux axes de coordonnées rectangulaires, sur chacun desquels l'unité de longueur est le centimètre. Construire les droites (D_1) et (D_2) représentant respectivement les fonctions :

$$y_1 = 3x - 5,$$
$$y_2 = x - 1.$$

Calculer les coordonnées du point d'intersection M de (D_1) et de (D_2).

(B. E. P. C.).

439. — On donne deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$.

1° Construire, en prenant 1 cm pour unité, la droite représentant les variations de la fonction :

$$y = -\frac{x}{2} + 2.$$

2° On désigne par A le point où cette droite coupe l'axe $x'x$ et par B le point où elle coupe l'axe $y'y$.

a) Calculer les coordonnées du milieu M du segment AB.

b) Quelle est la fonction dont le graphique est la médiane OM du triangle OAB?

3° Trouver la fonction représentée graphiquement par la droite passant par le point A et parallèle à la droite OM. Calculer l'ordonnée du point où elle coupe l'axe $y'y$.

(B. E. P. C.).

440. — 1° Démontrer que les droites (D) et (D′) qui représentent respectivement les variations des fonctions $y = 2x$ et $y = -2x$ sont symétriques par rapport aux axes de coordonnées.

2° Généraliser pour les fonctions $y = \alpha x$ et $y = -\alpha x$ (α étant un nombre donné non nul).

3° Démontrer la réciproque. (¶ *Démontrer que le symétrique, par rapport à l'un des axes, d'un point du graphique de la fonction $y = ax$ appartient au graphique de la fonction : $y = -ax$).*

441. — 1° Démontrer que les droites (D) et (D′) qui représentent respectivement les variations des fonctions $y = 2x + 3$ et $y = -2x + 3$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

2° Généraliser pour les fonctions $y = \alpha x + \beta$, $y = -\alpha x + \beta$ (α et β étant des nombres donnés, $\alpha \neq 0$).

3° Démontrer la réciproque.

442. — 1° Démontrer que les droites (D) et (D′) qui représentent respectivement les variations des fonctions $y = \frac{x}{2} + 1$ et $y = -\frac{x}{2} - 1$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

2° Généraliser pour les fonctions $y = \alpha x + \beta$, $y = -\alpha x - \beta$, α et β étant des nombres donnés. Quelle particularité présentent les droites (D) et (D′) lorsque $\alpha = 0$?

3° Démontrer la réciproque.

443. — 1° Démontrer que, quelle que soit la valeur que prend le nombre m, la droite représentant les variations de la fonction :

$$y = mx - (3m + 2)$$

passe par le point A ($x = 3$; $y = -2$).

2° Par rapport aux mêmes axes de coordonnées, tracer les droites (D_1) et (D_2) qui représentent les variations de la fonction du 1° pour les valeurs respectives $m = 1$ et $m = -2$.

3° Comment faut-il choisir le nombre m pour que le graphique de la fonction du 1° passe par l'origine O des coordonnées ?

Même question pour que le graphique passe par le point P ($x = 5$; $y = -4$). (¶ *Les coordonnées de* P *doivent vérifier la relation qui définit la fonction; ce qui donne une équation dont l'inconnue est m.*)

444. — 1° Simplifier l'expression : $y = \dfrac{9x^3}{-3x^2 - 2x} + \dfrac{4}{3x + 2}$.

2° Le résultat trouvé est de la forme $y = ax + b$; construire la droite (D) représentant les variations de cette fonction y, puis la droite (D_1) représentant les variations de la fonction $y = \frac{x}{3}$, enfin la droite (D_2) représentant les variations de la fonction $y = 2$.

3° Calculer les coordonnées du milieu I du segment AB, A étant l'intersection de Oy et de (D), B celle de (D_1) et (D_2). (B. E. P. C.).

445. — 1° Écrire sous la forme d'un polynome le produit : $(x^2 + 3x)(x - 1)$.
2° Simplifier les fractions :

$$A = \frac{(2x+1)(x^2-2x)}{x^2-x}; \qquad B = \frac{(x-2)(x^2+3x)}{x^3+2x^2-3x}.$$

Pour quelles valeurs de x ces fractions ne sont-elles pas égales à celles qui sont obtenues après simplifications ?

3° Calculer, après simplification, $y = \frac{A}{B}$. Variation de y et graphique.

(B. E. P. C.).

446. — Soit OAB un triangle rectangle en O; OA = 12 cm, OB = 5 cm. Un point M situé sur OA est défini par AM = x (cm). On appelle MN le segment parallèle à OB, N étant sur AB, et NP la parallèle à OA, P étant sur OB.

1° Évaluer, en fonction de x, MN, NP, puis le demi-périmètre $y = MN + NP$ du rectangle OMNP.

2° Représenter graphiquement la variation de y, en fonction de x, lorsque M décrit le segment OA. Quelles sont les limites de y ?

3° Trouver, graphiquement et par le calcul, la valeur de x lorsque $y = \frac{27}{4}$.

(B. E. P. C.).

447. — Un rectangle a 38 mm de longueur et 25 mm de largeur. On augmente sa longueur de x mm et sa largeur de y mm, x et y étant variables.

1° Calculer y en fonction de x, en supposant d'abord qu'on obtient un nouveau rectangle R dont le périmètre mesure 164 mm.

Représenter graphiquement les variations de y en fonction de x.

2° Calculer y en fonction de x, en supposant maintenant qu'on obtient un carré C.

Représenter par rapport aux mêmes axes que précédemment les variations de y en fonction de x.

3° Utiliser les graphiques précédents pour déterminer x et y de telle façon que le carré C ait un périmètre de 164 mm.

4° Le carré C ayant pour aire 2 352,25 cm², calculer son côté ainsi que x et y.

(B. E. P. C.).

448. — Une ligne de tramways a 12 kilomètres de longueur. Les départs ont lieu toutes les 10 minutes, à partir de 6 heures du matin dans les deux sens. La durée du trajet dans un sens est de 45 minutes. Représenter graphiquement la marche de ces tramways entre 10 heures et 12 heures. Combien le tramway partant à 11 heures croise-t-il d'autres tramways ? En serait-il ainsi du tramway qui part à 6 heures du matin ?

449. — Trois villes A, B, C sont disposées dans cet ordre sur une même route. La distance AB est égale à 60 km. Deux motocyclistes partent en même temps de la ville B, l'un se dirigeant vers A, l'autre vers C, avec la même vitesse, 45 km/h. Au même instant un automobiliste part de A vers C à la vitesse de 75 km/h.

1° Au bout de combien de temps l'automobiliste rencontre-t-il le motocycliste qui se dirige vers A ?

2° Sachant que l'automobiliste et le second motocycliste, parti de B, arrivent en même temps en C, calculer la distance BC.

3° Représenter graphiquement les mouvements de ces trois mobiles, en prenant comme origine des temps l'heure commune de départ et comme origine des abscisses la ville A. (Représenter l'unité de durée, 1 h, par 6 cm et une distance de 10 km par 1 cm.)

Peut-on utiliser ce graphique pour déterminer l'heure où l'automobiliste et le motocycliste allant de B vers C sont à la même distance de B? Justifier votre réponse.

(B. E. P. C.).

450. — On donne un triangle MAB rectangle en M et dans lequel MA = 5 cm, MB = 3 cm. Sur MA, entre M et A, on prend un point P variable et l'on prolonge MB d'un segment BQ = AP = x (en cm).

1° Calculer en fonction de x les aires y_1, y_2, y_3 du triangle MAQ, du triangle MBP et du quadrilatère APBQ respectivement.

2° Représenter, par rapport aux mêmes axes de coordonnées, les variations de y_1, y_2, y_3 en fonction de x, lorsque M décrit le côté AM.

(B. E. P. C.).

451. — Les trois côtés d'un triangle ABC sont AB = 6 cm, BC = 3 cm, CA = 4 cm. Sur AB on choisit, entre A et B, un point M défini par la mesure x, en cm, du segment AM et l'on trace par M les parallèles à AC et BC, qui coupent respectivement les côtés BC et AC en P et Q.

1° Évaluer, en fonction de x, le périmètre y du parallélogramme MPCQ.

2° Étudier les variations de la fonction obtenue et la représenter graphiquement, en prenant pour unité le centimètre.

3° Quelle valeur faut-il donner à x pour que le périmètre y ait pour valeur 7,6? Utiliser le graphique, puis résoudre par le calcul. (B. E. P. C.).



452. — 1° Un train ayant 300 m de long se déplace d'un mouvement uniforme. Il met 36 s pour passer devant un observateur immobile. Quelle est sa vitesse?

2° Un train marchant en sens inverse du premier d'un mouvement uniforme le croise en 24 s, c'est-à-dire qu'il s'écoule 24 s entre l'instant où les têtes de trains arrivent en face l'une de l'autre et le moment où les extrémités de ces trains sont en face l'une de l'autre. Ce deuxième train met 18 s pour passer devant un observateur immobile. Calculer la vitesse du second train et sa longueur.

453. — 1° Étudier les variations de la fonction :

$$y = |x|$$

et tracer son graphique par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires.

2° Par rapport aux mêmes axes tracer le graphique de la fonction :

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

et déterminer les coordonnées de ses points d'intersection avec le graphique du 1°.

454. — 1° Étudier les variations de la fonction : $y = |x - 4|$ et tracer son graphique par rapport à deux axes de coordonnées.

2° Par rapport aux mêmes axes, tracer le graphique de la fonction :

$$y = |x| + |x - 1|$$

et calculer les coordonnées de ses points d'intersection avec le graphique du 1°.

455. — 1° Représenter graphiquement, par rapport aux mêmes axes, les fonctions :

$$y = x + 4; \qquad y = -\frac{2}{3}x - 1; \qquad y = -4x + 9.$$

2° Les trois droites obtenues forment un triangle ABC. Calculer les coordonnées des sommets A, B, C et celles des milieux M, N, P des segments AB, BC, CA respectivement. (On appellera B celui des sommets qui a une abscisse négative.)

3° Comment est placée la droite BP? Évaluer la longueur du segment BP. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

4° Représenter graphiquement les fonctions $y = 6x - 1$ et $y = -\frac{3x}{2} + \frac{3}{2}$ par rapport aux mêmes axes que précédemment. Démontrer que leurs graphiques sont deux médianes du triangle ABC.

456. — Deux villes A et B sont distantes de 20 km et la route qui les joint passe par le village C situé à 4 km de la ville A. Un cycliste, Paul, part de A à 10 heures et se dirige vers B. Mais, à 4 km de B, il s'aperçoit qu'il a perdu un colis attaché à son porte-bagages. Il fait demi-tour et retrouve ce colis à 12 km de A. Il reprend alors sa route pour la ville B, où il arrive à 11 h 45 mn.

1° Quelle a été la vitesse de Paul, si l'on admet qu'il n'a eu aucun arrêt appréciable et qu'il a conservé une vitesse constante durant tout son trajet?

2° Faire une représentation graphique de la marche de Paul. On portera en abscisses le temps écoulé depuis le départ de Paul de la ville A en représentant 1 h par 8 cm. En ordonnée, on portera les distances à la ville A en prenant 1 cm pour 2 km.

3° Trouver les lois horaires des mouvements de Paul représentés sur le graphique.

4° Un cycliste, Jean, part du village C à 10 heures et gagne la ville B d'un mouvement uniforme. Trouver à l'aide du graphique les heures auxquelles, s'il faisait 8 km à l'heure, il rencontrerait Paul. (B. E. P. C.).

457. — Sur une route sont situés dans l'ordre, les points A, B, C et D : AB = 50 km, BC = 50 km, CD = 100 km. A 0 heure une automobile, P, part de A vers D. Elle s'arrête 1 heure en C, puis repart vers D. Elle se déplace à la vitesse de 100 km/h. On désigne la mesure en kilomètres de la distance AP par x et l'heure par t.

1° Exprimer x en fonction de t, suivant la portion de route où se trouve l'automobile. Représenter graphiquement ce mouvement.

2° Une deuxième automobile, Q, part de B vers D à 0 heure. Elle se déplace à la vitesse de 40 km/h et ne s'arrête pas en chemin. Exprimer en fonction de t la mesure y en kilomètres de sa distance à A. Représenter le mouvement sur les axes du 1°.

A quelles heures et à quelles distances de A l'une des automobiles P et Q dépasse-t-elle l'autre? Solution graphique et solution algébrique.

3° On désigne par v la vitesse en kilomètres par heure de l'automobile Q; discuter, suivant les valeurs de v, le nombre de rencontres, avant l'arrivée en D, des automobiles P et Q. Dire, en particulier, entre quelles limites on doit choisir v pour qu'elles se rencontrent trois fois avant d'arriver en D. (B. E. P. C.).

CHAPITRE VII

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

I. ÉQUATIONS ENTIÈRES

Travaux pratiques d'initiation.

1° Ecrire sous la forme d'une égalité la règle qui permet de calculer le cube de $a + b$.
Comment appelle-t-on une telle égalité?

2° Calculer, pour $x = -2$, les valeurs numériques des polynomes :

$$3x^2 + 5x + 1 \quad \text{et} \quad x^3 - 4x + 3.$$

Que constate-t-on?

3° Calculer pour $x = 1$; $x = -3$; $x = 4$; $x = -1$; $x = 2$ les valeurs numériques des deux membres de l'égalité :

$$x^3 - 6 = 5x - 2x^2.$$

Comment appelle-t-on une telle égalité?

4° Peut-on calculer pour $x = -3$ la valeur numérique de chaque membre de l'égalité :

$$\frac{1}{x-3} = \frac{x-1}{x+3}?$$

Comparer les valeurs numériques des deux membres pour $x = 0$ et pour $x = 5$.

5° L'égalité suivante est-elle vraie pour $x = -2$ et $y = 3$?

$$x^3 - 4xy - 1 = y^3 + 3x - 2y.$$

Même question pour $x = 1$ et $y = -2$; $x = 1$ et $y = \sqrt{2}$.

123. Position du problème. — 1° Lorsqu'on écrit :

$$13 + 5 = 20 - 2, \qquad (1)$$

on écrit une *égalité numérique*. On la vérifie en effectuant les calculs indiqués à droite et à gauche du signe =.

2° Lorsqu'on écrit : $5(x+2) = 5x + 10$ (2)

le second membre est le résultat des opérations effectuées sur le premier. En remplaçant x par une valeur numérique *quelconque* on trouve une égalité numérique. Nous avons déjà dit que la relation (2) est une *identité*.

3° Lorsqu'on écrit :

$$3(x+2) = 2x + 8 \qquad (3)$$

on pourrait dire que cela est faux et ce serait faux, en effet, si l'on avait voulu écrire une identité.

Mais cette écriture est la traduction d'une question qui s'énonce :

Existe-t-il, au moins, une valeur de x *telle que* $3(x+2)$ *soit égal à* $2x+8$?

On pourrait écrire : $3(x+2) = 2x + 8$?

pour indiquer qu'il s'agit d'une question posée. L'usage a prévalu de sous-entendre le point d'interrogation, mais il faut comprendre qu'il s'agit essentiellement de savoir s'il existe une ou plusieurs valeurs de x, encore inconnue, qui rendra égaux les deux membres de l'égalité.

Une telle égalité conditionnelle s'appelle une *équation*; le nombre x est dit l'*inconnue de l'équation*.

124. Définitions.

☆ ***Une* équation *est une égalité conditionnelle dans laquelle les deux membres, expressions algébriques d'une ou plusieurs variables, appelées inconnues, n'ont pas les mêmes valeurs numériques quelles que soient les valeurs attribuées à ces variables. (La même variable a la même valeur numérique dans les deux membres.)***

EXEMPLES.

(4) $3x^2 + 4x = 2 - 5x - 2x^2$ est une équation à une inconnue, x.

(5) $(x+y)^2 - 5 = x^2 + y^2 + 3$ est une équation à deux inconnues, x et y.

☆ **Résoudre *une équation c'est :***

1° chercher s'il existe une ou plusieurs valeurs des inconnues qui vérifient l'équation, c'est-à-dire qui font prendre aux deux membres la même valeur numérique;

2° calculer toutes ces valeurs.

Ces valeurs des inconnues, lorsqu'elles existent, s'appellent les* solutions *(ou les* racines*) de l'équation.

EXEMPLES. On vérifiera que $x = -2$ est solution de l'équation (4) et que le couple $x = 1$, $y = 4$ est une solution de l'équation (5).

Une équation n'a pas toujours des solutions. Si l'on écrit, par exemple, l'équation :

$$x^2 = -1, \qquad (6)$$

on sait que le carré d'un nombre relatif n'est pas négatif. Il n'existe donc pas de nombre x qui ait -1 pour carré. On dit que l'équation (6) est *impossible.*

On écrit une **équation entière** quand on se pose la question suivante : *Existe-t-il des valeurs des inconnues pour lesquelles deux polynomes donnés prennent la même valeur numérique?*

Les deux polynomes sont appelés les *deux membres de l'équation.*

EXEMPLES.

$$3(x+1)-4 = 2(x-3)+5,$$
$$x^2+4x-5 = 2x^2+3x-5,$$
$$x^2+2y+1 = (x-y)^2+3,$$

sont des équations entières.

125. Réduction dans chaque membre. — Les résultats établis en classe de Quatrième sur des équations entières à une inconnue s'étendent à des équations entières à plusieurs inconnues.

Nous raisonnerons sur un exemple. Soit l'équation :

$$(x+y)^2 - (x^2-3) = (x+2)(y-1) - 6(y-x) + 1. \qquad (1)$$

Effectuons dans chaque membre de l'équation les opérations indiquées. Nous obtenons ainsi, pour le premier membre :

$$(x+y)^2 - (x^2-3) \equiv x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 3 \equiv 2xy + y^2 + 3,$$

et, pour le second membre :

$$(x+2)(y-1) - 6(y-x) + 1 \equiv xy + 2y - x - 2 - 6y + 6x + 1$$
$$\equiv xy + 5x - 4y - 1;$$

l'équation devient :

$$2xy + y^2 + 3 = xy + 5x - 4y - 1. \qquad (2)$$

Pour des valeurs quelconques de x et de y les premiers membres des équations (1) et (2) prennent la même valeur numérique; il en est de même pour les seconds membres.

Donc, s'il existe des valeurs particulières $x = x_0$ et $y = y_0$ qui donnent aux deux membres de (1) la même valeur numérique, ces valeurs x_0 et y_0 donnent aussi aux deux membres de (2) la même valeur numérique et vice-versa.

Il revient au même, par conséquent, de résoudre l'équation (2) ou de résoudre l'équation (1).

- ***On ne modifie pas les solutions d'une équation entière, si elles existent, en réduisant chacun des membres de cette équation.***

En particulier, si l'équation à laquelle on aboutit après ces réductions est une équation impossible, on en conclut que l'équation initiale est également impossible.

Exemple. Soit l'équation :

$$x^2 + x(x-1) + x + 2 = 3(x-2) - x - 2(x+1).$$

Elle s'écrit :

$$x^2 + x^2 - x + x + 2 = 3x - 6 - x - 2x - 2,$$

et après réductions :

$$2x^2 + 2 = -8.$$

Pour toute valeur de x, le premier membre est au moins égal à 2, il ne peut pas être égal à -8. L'équation proposée est impossible.

On commencera toujours en pratique par faire ces réductions, dans les deux membres de l'équation, s'il y a lieu.

126. Transposition d'un terme d'un membre dans l'autre. — Soit l'équation :

$$y - 4x + 5 = 6 + 3y + x. \qquad (1)$$

Si cette équation admet la solution $x = x_0$, $y = y_0$, cela veut dire que pour ces valeurs numériques, on a l'égalité :

$$y_0 - 4x_0 + 5 = 6 + 3y_0 + x_0.$$

On sait que si l'on transpose un terme d'une égalité d'un membre dans l'autre, on doit changer le signe qui le précède et l'on obtient alors une nouvelle égalité.

Transposons $-4x_0$ du premier membre dans le second, nous obtenons la nouvelle égalité :

$$y_0 + 5 = 6 + 3y_0 + x_0 + 4x_0.$$

Cela revient à dire que x_0 et y_0 sont solutions de l'équation :

$$y + 5 = 6 + 3y + x + 4x. \qquad (2)$$

Le même raisonnement montre que toute solution x et y de (2) est aussi solution de (1).

■ ***On ne modifie pas les solutions d'une équation entière, si elles existent, en transposant un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer le signe qui le précède.***

La combinaison des deux résultats énoncés permet de transposer tous les termes dans un même membre et de mettre l'équation sous la forme :

(1) $P(x) = 0$ s'il s'agit d'une équation à une inconnue x,

(2) $P(x, y) = 0$ s'il s'agit d'une équation à deux inconnues x et y;

$P(x)$ et $P(x, y)$ représentent symboliquement des polynomes réduits :

$P(x)$ polynome réduit en x,

$P(x, y)$ polynome réduit en x et y.

☆ **Résoudre *une équation mise sous la forme (1) ou (2) c'est chercher s'il existe des valeurs des inconnues pour lesquelles la valeur numérique du polynome est nulle.***

127. ☆ DÉFINITION. — ***Le degré d'une équation entière réduite à la forme :***

$P(x) = 0$ (équation à une inconnue x)

ou $P(x, y) = 0$ (équation à deux inconnues x et y)

est le degré du polynome P (par rapport à l'unique inconnue x ou par rapport à l'ensemble des inconnues x, y).

EXEMPLES. I.

$3x + 1 = 0$; $5y - 3x + 2 = 0$ équations du premier degré;

$x^2 + 3x - 4 = 0$; $x^2 + 2y^2 - 5 = 0$ équations du second degré.

II. $$(x + 1)^2 = (x + 2)^2 - 6x$$

s'écrit :

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 - 6x$$
$$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 4.$$

Après transpositions dans le premier membre et réduction :

$$4x - 3 = 0.$$

C'est une équation du premier degré.

On ne peut déterminer le degré d'une équation qu'après avoir fait la réduction de l'équation.

• **Applications.**

458. — *Démontrer que les équations suivantes sont impossibles, en justifiant, à chaque fois, la réponse :*

$x^2 + 4 = 0$; $x + 3 = x - 5$; $x^3 - 2x + 1 = x^3 - 2x + 3$.

459. — *Vérifier que :*

1° $x = -1$ *est une solution de l'équation :*

$$x^2 - 2x = 2x^3 + 5x^2.$$

2° $x = -2$, $y = +3$ *est une solution de l'équation :*

$$x^3 - 3y^2 + 1 = 3x^2 - 2y^3 - 4x.$$

3° $x = 5$ *et* $x = -2$ *sont des solutions de l'équation* $x^2 - 3x - 10 = 0$.

460. — *Simplifier les équations suivantes et indiquer leur degré :*

$$(x-5)(x+2) = (x+3)(x-1);$$
$$(3x^2+5)(1-x) = 2x^2 + 5x - 3(x^3+1);$$
$$(6x-3y)(2x-1) = 4x^2 + 3y - 1;$$
$$(x+1)^2 - (x-5)^2 = (x-1)(x+12);$$
$$(x^2-5y)(3x+2) = (1+3x^2)(x+7) - 3y(5x-2).$$

461. — 1° *En considérant* x *et* y *comme des inconnues, mettre la fonction* $y = 2x - 3$ *sous la forme d'une équation entière du premier degré, l'un des membres étant* 0.

2° *Vérifier que l'équation trouvée au* 1° *admet les solutions suivantes :*

a) $x = 0$, $y = -3$; *b*) $x = \frac{3}{2}$, $y = 0$; *c*) $x = 2$, $y = 1$.

462. — *Écrire les nombres qui manquent dans les équations suivantes :*

1° $x - \ldots = 0$ *doit avoir pour racine* $x = 1$;

2° $2x - \ldots = 0$ *doit avoir pour racine* $x = \frac{1}{2}$;

3° $2x^2 + 5x + \ldots = 0$ *doit avoir pour racine* $x = -2$;

4° $x^2 - \ldots x = 24$ *doit avoir pour racine* $x = -3$.

463. — *Vérifier que l'équation :*

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

admet pour solutions :

1° $x = 3$; $y = 4$; $z = 5$.

2° $x = 8$; $y = -15$; $z = 17$.

3° $x = \frac{-5}{36}$; $y = \frac{1}{3}$; $z = \frac{13}{36}$.

II. ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

Travaux pratiques d'initiation.

Comment faut-il choisir x pour que l'on ait :

1° $3x = 5$? $4x + 3 = 0$?

2° $\frac{x}{2} + 1 = 0$? $\frac{x}{\sqrt{3}} = 0$?

3° $x + \sqrt{2} = 0$? $x + 1 = \sqrt{2}$?

4° $\frac{x}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$? $x^2 - 4x + 3 = x^2 - 5x - 6$?

5° $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$? $\frac{2}{x} = \frac{4}{3}$?

128. Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue. — Lorsqu'une équation du premier degré à une inconnue a été réduite, elle se présente sous la forme :

$$ax + b = 0,$$

où a et b sont des coefficients (nombres supposés connus, mais non précisés) et où x est l'inconnue.

Il est essentiel de supposer que le *coefficient* a *n'est pas nul* sans quoi l'équation n'existerait pas.

1° *S'il y a une solution* x_0, on a l'égalité :

$$ax_0 + b = 0,$$

ce qui signifie que ax_0 et b sont des nombres opposés :

$$ax_0 = -b.$$

Par suite x_0 est le quotient exact de $-b$ par a ($a \neq 0$) :

$$x_0 = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}.$$

2° *Le nombre* $-\frac{b}{a}$ *est solution de l'équation*, car la valeur numérique du polynome $ax + b$ pour cette valeur de x est :

$$a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0.$$

Nous concluons :

▪ ***Une équation du premier degré à une inconnue :***

$$\mathbf{ax + b = 0},$$

dans laquelle $\mathbf{a \neq 0}$***, admet une solution unique qui est :***

$$\mathbf{x = -\frac{b}{a}}.$$

EXEMPLE. Soit à résoudre l'équation :

$$3(x^2 - 3x + 1) - 7(x - 2) = (2x + 1)^2 - (x^2 - 5x + 4).$$

Réduisons chaque membre. Nous obtenons :

$$3(x^2 - 3x + 1) - 7(x - 2) \equiv 3x^2 - 9x + 3 - 7x + 14$$
$$\equiv 3x^2 - 16x + 17,$$
$$(2x + 1)^2 - (x^2 - 5x + 4) \equiv 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 5x - 4$$
$$\equiv 3x^2 + 9x - 3.$$

D'où l'équation :

$$3x^2 - 16x + 17 = 3x^2 + 9x - 3.$$

En transposant dans le premier membre, nous obtenons :

$$3x^2 - 16x + 17 - 3x^2 - 9x + 3 = 0,$$

ou :

$$-25x + 20 = 0.$$

Par suite :

$$x = -\frac{20}{-25} = \frac{4}{5}.$$

Nous en concluons que :

$$\boxed{x = \frac{4}{5}}$$ est la solution de l'équation proposée.

D'après la démonstration faite, la vérification est inutile sauf à titre de contrôle des calculs. La vérification doit être faite sur l'équation primitive et non pas sur l'une des équations transformées obtenues au cours des calculs.

129. Cas particuliers. — La condition que le coefficient a n'est pas nul est indispensable pour que la relation :

$$ax + b = 0 \qquad (1)$$

soit une équation du premier degré.

Toutefois il peut arriver qu'une équation soit donnée sous une forme non réduite et qu'après réduction le monôme du premier degré en x disparaisse. *L'on doit dire alors que l'on n'a plus d'équation à résoudre.*

1er **Cas** : $a = 0$; $b \neq 0$. La relation (1) se réduit alors à l'égalité conditionnelle :

$$0x + b = 0?$$

laquelle est irréalisable.

On dit que l'on est conduit à une *impossibilité*, le premier terme étant nul quel que soit x.

2e **Cas** : $a = 0$; $b = 0$. La relation (1) se réduit alors à l'égalité conditionnelle :

$$0x = 0?$$

laquelle est vérifiée pour toute valeur de x.

On dit aussi que la valeur de x est indéterminée.

Exemples. 1° Soit à résoudre l'équation :

$$5(x - 3) = x^2 - 4x + 3 - (x^2 - 9x + 1)$$

En réduisant, on trouve :

$$5x - 15 = x^2 - 4x + 3 - x^2 + 9x - 1$$
$$5x - 15 = 5x + 2.$$

Sous cette forme, on aperçoit déjà l'*impossibilité*. D'ailleurs, en transposant, on obtient :

$$5x - 5x = 2 + 15; \qquad 0 = 17; \text{ ce qui est faux.}$$

2° Soit à résoudre l'équation :

$$3(x - 5) = x^2 - 4x - 5 - (x^2 - 7x + 10).$$

En réduisant, on trouve :

$$3x - 15 = x^2 - 4x - 5 - x^2 + 7x - 10$$
$$3x - 15 = 3x - 15.$$

Cette dernière relation est une *identité*. Elle est satisfaite pour toute valeur de x. L'équation proposée est vérifiée pour n'importe quelle valeur de x (on dit aussi qu'il y a indétermination pour la solution de cette équation).

Résumé

Équation réduite du premier degré $ax + b = 0$		
$a \neq 0$		solution unique $x = -\dfrac{b}{a}$
$a = 0$	$b \neq 0$	impossibilité
	$b = 0$	identité (x arbitraire).

130. Allégements dans les calculs. — I. *Soit l'équation :*

$$7\,x - 35 = 21\,x - 28. \qquad (1)$$

Si, pour une valeur x_0 de x, cette équation devient une égalité numérique, on a encore deux nombres égaux en divisant ses deux membres par 7. On obtient :

$$x - 5 = 3\,x - 4. \qquad (2)$$

Réciproquement, si l'équation (2) a une racine x_0, on a l'égalité numérique :

$$x_0 - 5 = 3\,x_0 - 4$$

et l'on trouve deux nombres égaux en multipliant les deux membres par 7 :

$$7\,x_0 - 35 = 21\,x_0 - 28.$$

Les équations (1) et (2) ont donc la même racine qui est :

$$x = -\frac{1}{2}.$$

II. *Soit l'équation* :

$$0{,}4\,x + 0{,}6 = 1{,}2\,x - 0{,}5. \qquad (3)$$

Multiplions par 10 les deux membres :

$$4\,x + 6 = 12\,x - 5,$$

ou :

$$11 - 8\,x = 0, \qquad (4)$$

la racine est :

$$x = \frac{11}{8}.$$

Le même raisonnement montre que les équations (3) et (4) ont la même racine. Rappelons que la division par zéro est une opération impossible. Nous énoncerons :

▪ ***On ne modifie pas les racines d'une équation, si elles existent, en multipliant ses deux membres par un même nombre, ou en les divisant par un même nombre, non nul.***

En particulier, on peut multiplier les deux membres par — 1.

EXEMPLE. L'équation : $-5\,x + 3 = -2\,x + 1$ a la même solution que l'équation :

$$5\,x - 3 = 2\,x - 1.$$

131. Suppression des dénominateurs d'une équation. — *Soit l'équation :*

$$\frac{5x-1}{3}-\frac{2x-3}{6}=\frac{x}{4}+\frac{9}{2}.$$

On se ramène à une équation entière en multipliant les deux membres par le plus petit multiple commun des dénominateurs, ce qui a pour effet de *supprimer les dénominateurs.* Ici, on multiplie par 12 et l'on obtient :

$$4(5x-1)-2(2x-3)=3x+54,$$

ou :

$$20x-4-4x+6=3x+54,$$

$$13x=54+4-6=52,$$

et :

$$\boxed{x=4.}$$

EXEMPLE. *Résoudre l'équation :*

$$\frac{x}{3}+\frac{5x+1}{8}=\frac{1-x}{6}+x+\frac{1}{3}.$$

Le plus petit dénominateur commun est 24. Nous multiplierons les numérateurs des termes successifs respectivement :

par 8, par 3, par 4, par 24 et par 8,

ce qui donne :

$$8x+3(5x+1)=4(1-x)+24x+8,$$

ou :

$$8x+15x+3=4-4x+24x+8,$$

$$23x+3=20x+12,$$

$$3x=9; \qquad \boxed{x=3.}$$

• REMARQUE. Si un terme n'a pas de dénominateur, on le considère comme ayant le dénominateur 1.

C'est ce qui a été fait, dans l'exemple précédent, pour le second terme, x, du second membre.

132. Interprétation géométrique. — Nous savons que si les coordonnées x et y d'un point M satisfont à la relation :

$$y=ax+b \qquad (1)$$

le point M décrit une droite (D) que nous avons appris à construire. Lorsque

le point M se trouve sur l'axe $x'x$, on a $y = 0$ et son abscisse x satisfait à la relation :

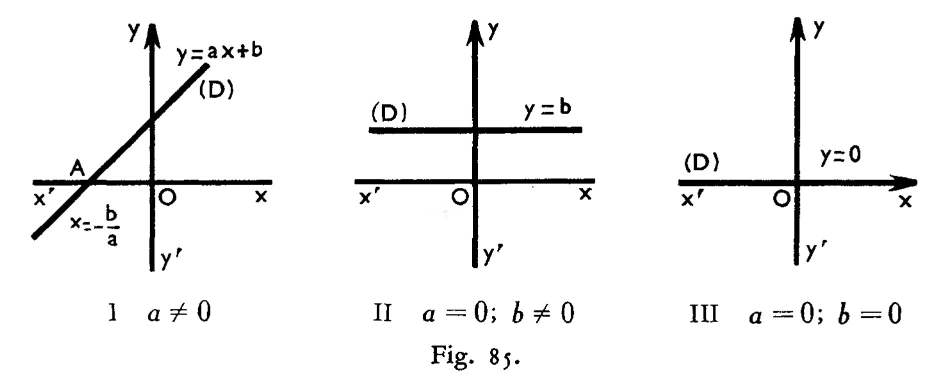
$$0 = ax + b. \qquad (2)$$

Réciproquement, si un nombre x_0 est solution de (2), le point de coordonnées $x = x_0$ et $y = 0$ se trouve sur la droite (D), graphique de la fonction $y = ax + b$ (*fig. 85*).

La solution de l'équation :

$$ax + b = 0$$

est donc l'abscisse du point A commun à l'axe $x'x$ et à la droite (D).



I $a \neq 0$ II $a = 0;\ b \neq 0$ III $a = 0;\ b = 0$

Fig. 85.

1° Si $a \neq 0$ la droite (D) coupe l'axe Ox en un point (*fig. 85*, I) dont l'abscisse est la racine de l'équation :

$$ax + b = 0.$$

2° Si $a = 0$, la relation $y = ax + b$ devient $y = b$.

La droite (D) n'a aucun point commun avec $x'x$ si b n'est pas nul. Il n'existe aucune valeur de x pour laquelle y soit nul.

On retrouve le cas d'*impossibilité* (*fig.* II).

Mais si $b = 0$, la droite (D) est confondue avec $x'x$. L'abscisse x de tout point M de $x'x$ satisfait à l'égalité $ax + b = 0$ (avec $a = b = 0$). On retrouve le cas de l'*identité* (*fig.* III).

EXEMPLE. Traçons le graphique de la fonction $y = 2x - 5$ en utilisant les points :

B $(x = 0; \quad y = -5)$
C $(x = 2; \quad y = -1)$.

La droite (D) passant par B et C coupe $x'x$ en un point A (*fig. 86*) dont on calcule l'abscisse en résolvant l'équation $2x - 5 = 0$, d'où $x = 2,5$.

On peut utiliser le graphique tracé pour résoudre graphiquement d'autres équations.

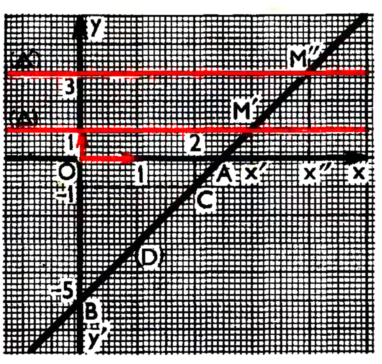


Fig. 86.

Les droites (Δ) et (Δ'), graphiques des fonctions respectives $y = 1$ et $y = 3$, coupent (D) en des points M' et M'' dont les abscisses x' et x'' vérifient les équations :

$$2\,x' - 5 = 1; \qquad 2\,x'' - 5 = 3.$$

On lit $x' = 3$ et $x'' = 4$ sur le graphique. Il est facile de contrôler par le calcul.

- **Applications.**

464. — *Résoudre les équations suivantes :*

1° $2\,x + 5 = 0, \quad 4\,x - \frac{1}{3} = 0.$

2° $4\,x + 5 = 7\,x - 2, \quad 3\,x + \frac{1}{4} = 4\,x - \frac{1}{2}.$

3° $(4\,x + 3) + (x - 1) = (x - 2) + 12.$

4° $(6\,x + 2) - (4\,x - 8) = (5\,x - 1) + (5 - 3\,x).$

465. — *Résoudre les équations suivantes, après les avoir simplifiées :*

1° $4\,x + 8 = 16 - 12\,x.$

2° $24\,(x + 7) = 36\,(x - 2) + 12.$

3° $15\,(3\,x - 4) + 6\,(5 - 2\,x) = 9\,(3\,x - 1) - 66.$

4° $0{,}7\,x + 1{,}4\,(x + 2) = 2{,}8\,(3 - x) + 3{,}5.$

5° $\frac{7\,x - 5}{2} - \frac{8\,x - 6}{3} = \frac{3\,x + 7}{4} + 1.$

466. — *Trouver les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des abscisses des graphiques des fonctions suivantes :*

1° $y = 3\,x - 5; \qquad y = 2\,x + 7.$

2° $y = -\frac{x}{2} + 3; \qquad y = -3\,x + \frac{1}{2}.$

467. — 1° *Tracer, par rapport aux mêmes axes, les graphiques des fonctions suivantes :*

$$y = -2\,x + 3, \qquad y = -1, \qquad y = 5.$$

2° *Lire sur le graphique la solution de chacune des équations :*

$$-2\,x + 3 = -1 \quad \textit{et} \quad -2\,x + 3 = 5.$$

468. — 1° *Tracer, par rapport aux mêmes axes, les graphiques des fonctions suivantes :*

$$y = 2\,x, \qquad y = -3.$$

2° *Lire sur le graphique la solution de l'équation :*

$$2\,x + 3 = 0.$$

III. EXEMPLES D'AUTRES ÉQUATIONS

Travaux pratiques d'initiation.

1° Quels sont les facteurs du produit :

$$4(x-1)(5x-2)(3x+1)^2 ?$$

Que peut-on dire d'un produit dont un facteur est nul?
Dans le produit ci-dessus, quels sont les facteurs susceptibles de s'annuler pour des valeurs convenables de x?

2° Transformer x^4-1 en produit de trois facteurs et séparer ces facteurs en deux catégories suivant qu'ils peuvent ou ne peuvent pas s'annuler.
Trouver les valeurs de x qui annulent le produit.

3° A quelles conditions une fraction peut-elle être nulle?
Peut-on choisir x de façon que les fractions suivantes soient nulles :

$$\frac{x-1}{2}, \quad \frac{2}{x-1}, \quad \frac{1}{x^2+1}, \quad \frac{x-1}{x^2+1}, \quad \frac{2x-5}{x+1}, \quad \frac{x+1}{x^2-4} ?$$

133. Décomposition d'une équation. — Soit une équation de la forme :

$$A \times B \times C = 0,$$

où A, B, C sont des polynomes du premier degré à une variable x.

On sait qu'un produit de nombres relatifs est nul si l'un au moins des facteurs est nul, et dans ce cas seulement. Les solutions de l'équation (1), si elles existent, sont donc les solutions des équations :

$$A = 0, \qquad B = 0 \qquad \text{et} \qquad C = 0.$$

EXEMPLES. I. *Résoudre l'équation* :

$$(x-1)(x+2)(4x-3) = 0.$$

Les solutions de cette équation sont les solutions des équations :

$$x-1=0; \qquad x+2=0; \qquad 4x-3=0$$

à savoir : $\qquad x = 1; \qquad x = -2; \qquad x = \frac{3}{4}.$

II. *Résoudre l'équation* : $\qquad 2x^2 - 5x = 0.$

Le premier membre peut s'écrire, en mettant x en facteur commun :

$$x(2x-5) = 0.$$

Les solutions sont : $\quad x = 0 \quad$ et $\quad x = \frac{5}{2}.$

III. *Résoudre l'équation* :

$$2(x+2)(x-3) = x^2 - 4.$$

En transposant les termes du second membre dans le premier, on obtient :

$$2(x+2)(x-3) - (x^2-4) = 0.$$

Or : $$x^2 - 4 \equiv (x+2)(x-2).$$

On peut donc écrire l'équation sous la forme :

$$2(x+2)(x-3) - (x+2)(x-2) = 0.$$

On aperçoit le facteur commun $(x+2)$ et l'on obtient alors :

$$(x+2)[2(x-3) - (x-2)] = 0,$$

ou : $$(x+2)(x-4) = 0.$$

Les solutions de l'équation proposée sont :

$$x = -2 \quad \text{et} \quad x = 4.$$

Si l'on avait réduit l'équation sans réflexion, l'on aurait obtenu :

$$2x^2 - 2x - 12 = x^2 - 4,$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0,$$

et l'on n'aurait pas su (en classe de 3[e]) résoudre cette équation. Ceci montre qu'*il est très important d'observer attentivement une équation avant de développer les calculs.*

IV. *Résoudre l'équation* :

$$(2x^2 - 5x + 6)^2 = 4(x^2 + x + 3)^2.$$

On peut écrire l'équation sous la forme :

$$(2x^2 - 5x + 6)^2 - 4(x^2 + x + 3)^2 = 0.$$

En utilisant l'identité : $a^2 - b^2 \equiv (a+b)(a-b)$ et, en remarquant que $4(x^2 + x + 3)^2$ est le carré de $2(x^2 + x + 3)$, c'est-à-dire de $2x^2 + 2x + 6$, on obtient :

$$(2x^2 - 5x - 6 + 2x^2 + 2x + 6)(2x^2 - 5x - 6 - 2x^2 - 2x - 6) = 0.$$

En réduisant chaque facteur, l'on trouve :

$$(4x^2 - 3x)(-7x - 12) = 0,$$

ou encore :

$$x(4x-3)(-7x-12) = 0 \quad \text{ou} \quad x(4x-3)(7x+12) = 0.$$

Les solutions de l'équation sont :

$$x = 0; \quad x = \frac{3}{4}; \quad x = -\frac{12}{7}.$$

134. Équations contenant l'inconnue au dénominateur. — Nous allons traiter quelques exemples d'équations dans lesquelles l'inconnue figure au dénominateur.

Rappelons qu'une fraction n'a de sens que si son dénominateur n'est pas nul. Il est donc exclu qu'une solution puisse annuler l'un des dénominateurs.

EXEMPLES. I. *Résoudre l'équation* :

$$\frac{2x+1}{x}=\frac{2x-5}{x-2}. \qquad (1)$$

S'il existe une valeur de x qui soit solution de (1), cette valeur ne peut être ni 0 ni 2. L'équation se présente sous la forme d'une proportion et l'on sait que l'égalité :

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

est logiquement équivalente à l'égalité :

$$ab'-ba'=0.$$

Il revient donc au même de résoudre l'équation :

$$(2x+1)(x-2)=x(2x-5) \qquad (2)$$

En effectuant on trouve :

$$2x^2-3x-2=2x^2-5x,$$

et, en transposant :

$$2x-2=0,$$

soit :

$$\boxed{x=1}$$

Cette valeur n'annule aucun dénominateur de l'équation (1). Elle est la solution de cette équation.

II. *Résoudre l'équation* :

$$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-3}{x-1}=2-\frac{2}{x-1}. \qquad (3)$$

S'il existe une valeur de x qui soit solution de (3), cette valeur ne doit être ni 1 ni 2.

En faisant l'hypothèse que l'équation (3) admet au moins une solution x_0, on obtient l'égalité numérique :

$$\frac{x_0-1}{x_0-2}+\frac{x_0-3}{x_0-1}=2-\frac{2}{x_0-1},$$

et, en multipliant les deux membres par le nombre $(x_0-2)(x_0-1)$, on obtient :

$$(x_0-1)^2+(x_0-3)(x_0-2)=2(x_0-1)(x_0-2)-2(x_0-2).$$

En réduisant, l'on trouve :

$$2x_0^2-7x_0+7=2x_0^2-8x_0+8,$$

ou :

$$x_0=1.$$

Cette valeur ne convient pas à l'équation (3) car elle annule les dénominateurs de deux des fractions. Comme il ne peut pas y avoir d'autres solutions, nous concluons que l'équation (3) n'a pas de racine. Elle est *impossible*.

III. *Résoudre l'équation :*

$$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-1}=\frac{3x-7}{(x-3)(x-1)}.$$

On aura, de même que précédemment :

$$x-1+2x-6=3x-7,$$

ou :

$$3x-7=3x-7.$$

C'est une *identité.* L'équation est donc vérifiée par toute valeur de x, *sauf les valeurs* 1 *et* 3 qui annulent les dénominateurs.

En résumé, on résout une équation dont l'inconnue figure au dénominateur comme une autre équation, mais on n'accepte les solutions trouvées, s'il en existe, que si elles n'annulent aucun dénominateur.

• **Applications.**

469. — *Résoudre les équations suivantes :*

1° $(x-1)(x+2)=0$; $(3x-1)(2x+5)=0$.
2° $3(x-2)(2x+1)=0$; $5(x^2+1)(3x-4)=0$.
3° $(x-2)(3x+5)(7x-3)=0$; $(3x^2+1)(2x-9)=0$.

470. — *Résoudre les équations suivantes après avoir mis le premier membre sous la forme d'un produit :*

1° $x^2-4=0$; $x(x-3)+2(x-3)=0$.
2° $x^2+5x=0$; $4x^2-7x=0$.
3° $(4x+3)^2-1=0$; $(2x+5)^2-(x-1)^2=0$.

471. — *Résoudre les équations suivantes après avoir transposé les termes du second membre dans le premier membre :*

1° $4x^2=5x$; $49x^2=16$.
2° $3(x-3)(2x+7)=x^2-9$; $(4x+1)(x+7)=3(x+7)$.
3° $(3x-2)^2=(x+4)^2$; $(9x-5)^2=9$.

472. — *Résoudre les équations suivantes :*

1° $\frac{3x-2}{x}=\frac{3x+6}{x+1}$; $\frac{4x-3}{4x+5}=\frac{2x+1}{2x+7}$.

2° $$\frac{1}{x-5}+\frac{3}{x-2}=\frac{4x+5}{(x-5)(x-2)}.$$

3° $$\frac{2}{3x-1}-\frac{3x}{x+2}=\frac{(1-x)(9x+4)}{(3x-1)(x+2)}.$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

★

473. — Réduire les équations suivantes et trouver le degré de chacune d'elles :

$$x^2(3x+5)-4x^2+3=x(1+3x^2)-3(2x-1).$$
$$2xy(x^2-y)+4xy=x^2y(2x-3)+5(x-4y).$$

Résoudre les équations :

474. $(7x-14)+(6x-2)-(4x-8)=3x+4-(x+16).$

475. $(9x-3)-(2x-1)-(9x-5)+(2x+4)=4x-9.$

476. $8(3x-5)-5(2x-8)=4(3x-1)+16.$

477. $6(3-2x)-5(3-x)=3(5-x)+18.$

Résoudre après simplifications :

478. $15(3x-4)+6(5-2x)=9(3x-1)-66.$

479. $250(x-4)+1250(x+1)=500(2x+3)+750.$

480. $3{,}6(3-2x)-3(3-x)=1{,}8(5-x)-12.$

481. $72(x-3)-36(x-2)=48(3-x)+60.$

Résoudre les équations :

482. $(4x-3)(x-1)=(2x-5)(2x-1).$

483. $4(x^2-x+1)+6(x-2)=4(x+1)^2.$

484. $(x-3)(x-1)-(x-2)^2=5x-11.$

485. $(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x-4)^2.$

486. $3(x-1)^2+2(x+1)^2=(5x-3)(x-5).$

487. $40(x+2)^2+80(x-3)^2=120(x^2-12x+7)+40.$

488. $12(x-3)^2-(2x-1)^2=(4x-5)(2x+1).$

489. $\dfrac{(x-2)^2}{5}+\dfrac{(x-1)(x-3)}{2}=\dfrac{(7x+1)(x-2)}{10}+\dfrac{2}{5}.$

490. $\dfrac{(2x-1)(x-1)}{3}-\dfrac{(x-3)^2}{4}=\dfrac{(5x-1)(x+1)}{12}+\dfrac{1}{3}.$

491. $\dfrac{(5x+1)^2}{3}-\dfrac{(8x+1)^2}{9}=\dfrac{(13x+1)(x+1)}{12}+\dfrac{5x^2}{36}.$

492. $\dfrac{(2x-3)(2x+3)}{8}=\dfrac{(x-4)^2}{6}+\dfrac{(x-2)^2}{3}.$

493. $\dfrac{4}{3}(2x-3)-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{x}{2}+1\right)=\dfrac{7}{6}(x+4)+\dfrac{1}{2}.$

Résoudre les équations :

494. $$\frac{x+3}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{x+5}{6}+1$$ (¶ *Identité*).

495. $$\frac{2x+1}{3}-\frac{x-1}{5}=\frac{7x-2}{15}$$ (¶ *Impossibilité*).

496. $$\frac{3x-2}{5}+\frac{x-1}{9}=\frac{14x-3}{15}-\frac{2x+1}{9}.$$

497. $$\frac{2x-1}{4}+\frac{x-3}{3}=\frac{4x-2}{3}-\frac{6x+7}{12}.$$

498. — 1° Résoudre l'équation :

$$x^2-4=0.$$

2° Résoudre l'équation :

$$x^2-3=0.$$

3° Résoudre l'équation : $x^2+5=0.$

4° On donne l'équation :

$$x^2-a=0,$$

a étant un nombre connu. Dire, suivant les valeurs de a, quel est le nombre de solutions de l'équation ? Quelle particularité présentent les solutions quand elles sont au nombre de deux ?

Résoudre les équations, en rendant entiers les dénominateurs des solutions :

499. $x\sqrt{2}-1=x+2;$ $x\sqrt{3}+1=x+3.$

500. $x-1=\sqrt{3}(x-3);$ $x+2=\sqrt{2}(x+1)$

501. $2x-\sqrt{2}=\sqrt{2}x-1;$ $2x+\sqrt{2}=\sqrt{2}x+1.$

502. $3x+\sqrt{3}=\sqrt{3}x+1;$ $3x-\sqrt{3}=\sqrt{3}x+1.$

Résoudre les équations :

503. $(x-3)(x-5)=0;$ $(x+2)(x^2-x)=0.$

504. $(x-2)(x+2)(x-4)=0;$ $(2x+1)(2x-1)(2x+3)=0.$

505. $(2x+5)(x-4)+(x-5)(x-4)=0.$ (¶ *Trouver un facteur commun.*)

Résoudre les équations :

506. $$\frac{3x+2}{x-1}=\frac{3}{2};\qquad \frac{x}{25-x}=\frac{3}{4}.$$

507. $$\frac{3+8x}{3-4x}=\frac{5-16x}{5+8x};\qquad \frac{1-9x}{5-6x}=\frac{7-6x}{5-4x}.$$

508. $$x-5=\frac{x^2-8x+9}{x-2};\qquad \frac{1}{x-3}=\frac{2x-5}{2x^2+4x-1}.$$

Résoudre les équations suivantes :

509. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{6x-5}{x^2-x}$ [¶ *Noter que* $x^2 - x \equiv x(x-1)$.]

510. $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3x+4}{x^2-1}$; $\frac{1}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{5-4x}{x^2+x}$.

511. $\frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} = \frac{2-x}{x^2+x}$; $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$.

512. $\frac{x-2}{x-3} - \frac{2x+11}{2x+9} = \frac{17}{(x-3)(2x+9)}$; $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{2x^2-1}{(x-2)(x-4)}$.

★ ★

Problème résolu. — 1° Résoudre l'équation :

$$4 + |x| = 2x - 5. \quad (1)$$

2° Résoudre l'équation :

$$x^2 - |x| = 0. \quad (2)$$

SOLUTION.

1° *Si* $x \geqslant 0$ *l'équation* (1) *s'écrit :*

$$4 + x = 2x - 5, \quad \textit{d'où :} \quad x = 9.$$

Cette solution convient puisqu'elle est positive.
Si $x \leqslant 0$ *l'équation* (1) *s'écrit :*

$$4 - x = 2x - 5, \quad \textit{d'où :} \quad x = 3.$$

Cette solution ne convient pas puisqu'elle n'est ni négative ni nulle.
Finalement l'équation (1) *admet la seule solution* $x = 9$.
2° *Si* $x \geqslant 0$ *l'équation* (2) *s'écrit :*

$$x^2 - x = 0, \quad \textit{ou :} \quad x(x-1) = 0.$$

Les solutions sont $x = 0$ *et* $x = 1$; *elles conviennent.*
Si $x \leqslant 0$, *l'équation* (2) *s'écrit :* $x^2 + x = 0$,
ou :

$$x(x+1) = 0.$$

Les solutions sont $x = 0$ *et* $x = -1$; *elles conviennent.*
Finalement l'équation (2) *admet* 3 *solutions :*

$$x = 0; \quad x = +1 \quad \text{et} \quad x = -1.$$

513. — Résoudre l'équation :

$$\frac{2x}{|x|+1} + \frac{|x|}{x+1} + 3 = 0.$$

514. — 1° Résoudre l'équation :
$3\sqrt{x^2} - |x| = 5$. (¶ *Se rappeler que* $\sqrt{x^2} = |x|$).
2° Comment faut-il choisir le nombre a pour que l'équation

$$3\sqrt{x^2} - |x| = a$$

ait deux racines ? une racine ? pas de racine ?

515. — Démontrer que l'équation :

$$\frac{3x+5}{3|x|+5} = -2$$

est impossible.

516. — Résoudre graphiquement l'équation :

$$3x - 5 = 7x - 1,$$

en traçant, par rapport aux mêmes axes, les graphiques des fonctions :

$$y = 3x - 5,$$
$$y = 7x - 1,$$

et en lisant l'abscisse de leur point d'intersection.

517. — 1° Tracer, par rapport aux mêmes axes, les graphiques des fonctions :

$$y = 2x + 6,$$
$$y = -2,$$
$$y = 2.$$

2° Lire sur le graphique la solution de chacune des équations :

$$2x + 6 = -2 \quad \text{et} \quad 2x + 6 = 2.$$

518. — 1° Mettre sous forme d'un produit de facteurs du premier degré l'expression :

$$y = (2x+3)(4x+5) - (4x^2 - 9) + (7x - 3)(2x + 3).$$

2° Résoudre l'équation :

$$(2x+3)(4x+5) - (4x^2 - 9) + (7x - 3)(2x + 3) = 0.$$

(B. E. P. C.).

519. — Soit l'expression algébrique :

$$F = (x^2 + 2x - 6)^2 - (x^2 - 2x - 2)^2.$$

Décomposer F en un produit de facteurs du premier degré. Résoudre l'équation :

$$F = 0.$$

(B. E. P. C.).

520. — Simplifier et résoudre l'équation suivante :

$$\frac{(x^2 + 2x + 1)(2x - 7)}{(4x^2 - 49)(x + 1)} = 1.$$

(B. E. P. C.).

521. — Soit le polynome : $P = 8x^3 + 4x^2 - (2x + 1)$.
Mettre P sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
Pour quelles valeurs de x a-t-on $P = 0$?

(B. E. P. C.).

522. — Résoudre les équations :

$$\left(\frac{x-7}{5} - \frac{x+2}{5}\right)\left(4x - 6 + \frac{x+1}{2}\right) = 0.$$
$$(3x+1)^2 - (4x+7)^2 = 0.$$
$$(2x-3)(x+6) + (3-2x)(4x-1) = 0.$$

(B. E. P. C.).

523. — 1° Décomposer en un produit de facteurs les polynomes suivants :

$$9x^2 - 1; \qquad 9x^2 + 6x + 1.$$

2° Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{6x - 2}{9x^2 - 1}; \qquad B = \frac{9x + 3}{9x^2 + 6x + 1}.$$

3° Déterminer une valeur numérique de x pour laquelle les expressions A et B + 1 prennent la même valeur numérique. Faire la vérification.

(B. E. P. C.).

524. — 1° Simplifier la fraction :

$$A = \frac{(3x - 12)(1 - x^2)}{(2x - 8)(x + 1)^2}$$

et préciser pour quelles valeurs de x cette simplification est possible.

2° Calculer x de manière que :

a) $A = 0$; *b*) $A = +1$; *c*) $A = \frac{3}{2}$; *d*) $A = -\frac{3}{2}$.

(B. E. P. C.).

525. — On donne les expressions :

$$A = (2x + 1)(x + 3) - (x + 3)^2 + x^2 - 9,$$
$$B = (2 - x)(2x + 1) + (2 - x)^2.$$

1° Développer les expressions A et B et ordonner les polynomes obtenus.

2° Mettre chacune des expressions A et B sous forme d'un produit de deux facteurs.

3° Résoudre les équations : $A = 0$; $B = 0$. (B. E. P. C.).

526. — On considère les polynomes :

$$A = (x + 3)^2 + 3x + 9,$$
$$B = (2x + 4)^2 - (x + 1)^2.$$

1° Réduire et ordonner A et B.

2° Les mettre sous forme de produits de facteurs du premier degré.

3° Résoudre les équations : $A = B$ et $\frac{A}{B} = 1$.

4° Résoudre les équations : $B = 3A$ et $\frac{B}{A} = 3$. (B. E. P. C.).

Résoudre les équations :

527. $\frac{3x + 2}{x - 1} + \frac{2x - 4}{x + 2} = 5; \qquad \frac{3}{x - 1} + \frac{2}{x} = \frac{5}{x - 3}.$

528. $\frac{1}{(6 - x)(x + 3)} - \frac{2x - 5}{6 - x} = \frac{2x + 1}{x + 3}.$

529. $\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x + 1} = \frac{4x - 5}{x(x^2 - 1)}.$

530. $\frac{1}{x - 4} + \frac{1}{x + 5} + \frac{1}{x - 1} = \frac{3}{x}.$

★ ★ ★

Problème résolu. — 1° Réduire et ordonner les polynomes :

$$(3x-4)^2 \quad \text{et} \quad (3x-4)^2(3x+8).$$

2° Résoudre l'équation :

$$\frac{3x+8}{27x^2}=\frac{x}{(3x-4)^2}. \qquad (1)$$

SOLUTION.

1° *En utilisant l'identité :* $(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$, *on obtient :*

$$(3x-4)^2 \equiv 9x^2-24x+16.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}(3x-4)^2(3x+8) &\equiv (9x^2-24x+16)(3x+8)\\ &\equiv (27x^3-72x^2+48x)+(72x^2-192x+128)\\ &\equiv 27x^3-144x+128.\end{aligned}$$

2° *L'étude de l'équation* (1) *suppose que* x *n'est égal ni à* 0 *ni à* $\frac{4}{3}$.

On peut écrire alors l'équation sous la forme :

$$(3x-4)^2(3x+8)=27x^3,$$

ou, en vertu du 1° :

$$27x^3-144x+128=27x^3,$$

$$x=\frac{128}{144}=\frac{8}{9}.$$

Cette valeur étant distincte de 0 *et de* $\frac{4}{3}$, *l'équation* (1) *admet pour solution :*

$$x=\frac{8}{9}.$$

Résoudre les équations :

531. $(x-5)^2=\dfrac{x^3}{x+10}$; $\quad (2x-5)^2=\dfrac{4x^3}{x+5}$.

532. $\dfrac{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}}{1+\dfrac{x}{x+1}}=1$; $\quad \dfrac{1+\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x}{x+2}-1}=2$.

533. $\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1}+1}{\dfrac{2x-1}{x+1}+2}=\dfrac{2}{3}$; $\quad \dfrac{1-\dfrac{x-2}{x+2}}{2+\dfrac{x}{x+2}}=\dfrac{1}{4}$.

534. $$\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{4-\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{4}; \qquad \frac{1-\frac{x+1}{x-1}}{1+\frac{x+1}{x-1}}=1+\frac{3(x-1)}{x}.$$

535. $$\frac{\frac{x+1}{x}-2}{\frac{x+1}{x}+2}=\frac{1-\frac{3x}{x+1}}{1+\frac{3x}{x+1}}.$$

536. $$\frac{x-2}{x+2}-1=\frac{1}{\frac{x+2}{x-2}}\left[\frac{2(x+2)}{x-2}-1\right].$$

537. — *a*) Effectuer le produit :

$$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

b) Simplifier l'expression :

$$y=\frac{x^2}{x^2+2x+2}+\frac{x^2}{x^2-2x+2}-\frac{4(x^2-5)}{x^4+4}.$$

c) On pose $x^4 = X$. Déterminer X de façon que $y=\frac{322}{65}$. En déduire x.

(Admission aux E. N.).

538. — On donne l'équation suivante, dont x est l'inconnue :

$$5(m-1)x^2-(2m-7)x-3(m-2)=0.$$

1° Résoudre cette équation quand $m = 1$.

2° Pour quelles valeurs de m l'équation admet-elle pour racines $x = -1$, $x = 1$?

3° On pose :

$$a=5(m-1); \quad b=-(2m-7); \quad c=-3(m-2).$$

Calculer en fonction de m l'expression $b^2 - 4ac$. Démontrer qu'elle est le carré d'un binome du premier degré en m.

4° Que devient l'équation initiale en x quand on remplace m par la valeur $\frac{13}{8}$? Montrer qu'on peut, après simplification, mettre son premier membre sous la forme du carré d'un binome du premier degré en x, puis résoudre l'équation.

(B. E. P. C.).

539. — 1° Développer $(x+3)^2$, en ordonnant suivant les puissances décroissantes de x.

2° Effectuer le produit :

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)(x^2+6x+9).$$

3° Utiliser les résultats qui précèdent pour déterminer les valeurs de x pour lesquelles le produit $x^2\left(x+\frac{9}{2}\right)$ est égal à $\frac{27}{2}$.

(B. E. P. C.).

CHAPITRE VIII

INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

I. INÉQUATIONS ENTIÈRES

Travaux pratiques d'initiation.

1° Quand dit-on qu'un nombre relatif a est plus grand qu'un nombre relatif b?
De deux nombres négatifs, quel est le plus grand?

2° Que devient une inégalité numérique quand on ajoute un même nombre aux deux membres? quand on transpose un terme d'un membre dans l'autre?
Transposer -7 dans l'inégalité :

$$12 - 7 + 3 > -5 + 9.$$

3° Que devient une inégalité numérique quand on multiplie les deux membres par un nombre non nul?
Multiplier les deux membres de l'inégalité du 2° par $+3$, par -2, par -1.

4° Qu'obtient-on en élevant au carré les deux membres d'une inégalité? Appliquer à :

$$5 - 9 < -2; \qquad -5 + 7 > 1; \qquad 7 - 9 < 2 + 3.$$

135. Inéquations à une inconnue. — 1° Lorsqu'on écrit :

$$13 + 5 > 20 - 7, \qquad (1)$$

on écrit une *inégalité numérique*. On la vérifie en effectuant les calculs indiqués dans les deux membres.

2° Lorsqu'on écrit :

$$3(x + 5) \geqslant 2x + 1, \qquad (2)$$

on pourrait dire que cela est faux, et ce serait faux, en effet, si l'on avait voulu écrire une inégalité numérique.

Mais cette écriture est la traduction d'une question qui s'énonce :

Existe-t-il au moins une valeur de x *telle que* $3(x+5)$ *soit supérieur ou égal à* $2x+1$?

On pourrait écrire :

$$3(x+5) \geqslant 2x+1 \;?$$

pour indiquer qu'il s'agit d'une question posée. L'usage a prévalu, comme pour les équations, de sous-entendre le point d'interrogation; mais il faut comprendre qu'il s'agit essentiellement de savoir s'il existe une ou plusieurs valeurs de x, encore inconnue, qui transformera l'inégalité conditionnelle en une inégalité numérique.

☆ DÉFINITIONS. — ***Une inéquation à une variable est une inégalité conditionnelle dans laquelle les deux membres sont des expressions algébriques de cette variable.***

Résoudre *une inéquation c'est :*
1° chercher s'il existe des valeurs de la variable qui vérifient l'inéquation, c'est-à-dire telles que l'inéquation devienne une inégalité numérique lorsqu'on y remplace la variable par ces valeurs;
2° calculer ces valeurs.

Ces valeurs, lorsqu'elles existent, s'appellent les *solutions* de l'inéquation.

Il existe des inéquations qui sont vérifiées quelle que soit la valeur donnée à la variable.

EXEMPLES.

$$x^2+4>0,$$
$$x^2+3 \geqslant 3,$$

sont des inéquations qui sont vérifiées pour toute valeur de x.

D'autres inéquations ne sont vérifiées pour aucune valeur de x.

EXEMPLE.

$$x^2+2x+1<0$$
$$\text{car : } x^2+2x+1 \equiv (x+1)^2.$$

Enfin, des inéquations sont vérifiées pour certaines valeurs de la variable.

EXEMPLES. I. $\qquad x-3 \geqslant 0$

est une inéquation qui n'est vérifiée que pour les valeurs de x supérieures ou égales à 3.

II. $3x - 5 < x + 1$

est une inéquation. On constatera qu'elle est vérifiée pour $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$ et qu'elle ne l'est pas pour $x = 3$, $x = 5$.

136. Sens d'une inéquation. — Écrivons les inéquations :

(1)	$x + 1 < 2x - 3$	(1) et (2) sont de même sens,
(2)	$2x - 1 < 2 - 2x$	(3) et (4) sont de même sens,
(3)	$4x^2 > 2x + 1$	(1) et (3) sont de sens contraires,
(4)	$x + 1 > 2x - 9$	(2) et (4) sont de sens contraires.

137. Inéquations entières. — On écrit une inéquation entière quand on se pose la question suivante :

Étant donné deux polynomes en x, *existe-t-il des valeurs de* x *pour lesquelles la valeur numérique du premier est supérieure (ou inférieure) à la valeur numérique du second ?*

Les deux polynomes sont les *deux membres* de l'inéquation.

EXEMPLES. $9x - 5 > x^2 - 10$; $4x^2 + 1 < 2x - 5$ sont des inéquations entières.

• REMARQUES. — I. Le mot « supérieur » (ou « inférieur ») est parfois entendu au sens large et l'on écrit alors $\geqslant$ ou $\leqslant$.

$$3x - 5 \geqslant x - 1$$

est une inéquation entière, ainsi que : $x - 1 \leqslant 3x + 2$.

II. Une inéquation écrite avec le symbole $>$ peut se remplacer par une autre inéquation écrite avec le symbole $<$.

EXEMPLES. $x^2 + 1 > 3x - 5$ peut s'écrire $3x - 5 < x^2 + 1$.
$-2x + 3 \leqslant 5 + 4x$ peut s'écrire $5 + 4x \geqslant -2x + 3$.

138. Simplification d'une inéquation entière. — On démontre, comme pour les équations, les propriétés suivantes :

▪ ***On ne modifie pas les solutions d'une inéquation, si elles existent, en réduisant les membres de cette inéquation.***

EXEMPLE. L'inéquation :

$$(x + 1)^2 - 5(x - 3) \geqslant (x + 2)(x - 1) + 6(x - 2) + 1 \qquad (1)$$

s'écrit, en effectuant dans chaque membre les opérations indiquées :

$$x^2 + 2x + 1 - 5x + 15 \geqslant x^2 + 2x - x - 2 + 6x - 12 + 1,$$
$$x^2 - 3x + 16 \geqslant x^2 + 7x - 13. \qquad (2)$$

- ***On ne modifie pas les solutions d'une inéquation, si elles existent, en transposant un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer le signe qui le précède.***

EXEMPLE. En transposant x^2 et $-3x$ du premier membre dans le second de l'inéquation (2), on obtient :

$$16 \geqslant x^2 + 7x - 13 - x^2 + 3x, \qquad (3)$$
$$16 \geqslant 10x - 13,$$

et, en transposant -13 du second membre dans le premier :

$$16 + 13 \geqslant 10x, \qquad (4)$$
$$29 \geqslant 10x.$$

La transposition de tous les termes du second membre dans le premier permet de mettre l'inéquation sous la forme :

$$P(x) \geqslant 0$$

(ou $P(x) > 0$ ou $P(x) \leqslant 0$ ou $P(x) < 0$, selon les cas)

dans laquelle $P(x)$ désigne symboliquement un polynome réduit en x.

Résoudre l'inéquation mise sous cette forme c'est chercher s'il existe des valeurs de x *pour lesquelles la valeur numérique du polynome est positive ou nulle et calculer ces valeurs.*

EXEMPLE. L'inéquation (2) peut s'écrire :

$$x^2 - 3x + 16 - (x^2 + 7x - 13) \geqslant 0, \qquad (5)$$

en transposant, en totalité, les termes du second membre dans le premier, c'est-à-dire : $x^2 - 3x + 16 - x^2 - 7x + 13 \geqslant 0,$

ou : $$-10x + 29 \geqslant 0. \qquad (6)$$

139. ☆ DÉFINITION. — **Le degré *d'une inéquation entière réduite mise sous la forme :*** $P(x) > 0$ ***est le degré du polynome P(x).***

EXEMPLES. I. $3x + 1 > 0$; $4 - 3x \leqslant 0$ sont des inéquations du premier degré.

II. $$(x + 1)^2 \leqslant (x + 2)^2 - 6x,$$

s'écrit :

$$x^2 + 2x + 1 \leqslant x^2 + 4x + 4 - 6x.$$

Après transposition dans le premier membre :

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 - 4x - 4 + 6x \leqslant 0,$$

soit, après réductions :

$$4x - 3 \leqslant 0;$$

c'est une inéquation du premier degré.

On ne peut déterminer le degré d'une inéquation qu'après avoir fait la réduction de l'inéquation.

140. Multiplication ou division des deux membres d'une inéquation par un nombre. — Soit l'inéquation :

$$7(x-5)-14(x+1)>35(x-1). \quad (1)$$

On remarque que tous les coefficients sont divisibles par 7. Si, pour une valeur x_0 de x, la valeur numérique a du premier membre est supérieure à la valeur numérique b du second membre :

$$a>b,$$

on aura aussi, en vertu d'une propriété connue des inégalités :

$$\frac{a}{7}>\frac{b}{7}.$$

Le nombre x_0 est donc aussi solution de l'équation :

$$(x-5)-2(x+1)>5(x-1). \quad (2)$$

Réciproquement, si un nombre x_1 est solution de (2), la valeur numérique a' du premier membre de (2) est supérieure à la valeur numérique b' du second membre de (2) :

$$a'>b',$$

et l'on a aussi : $$7a'>7b'.$$

Le nombre x_1 est donc aussi solution de l'inéquation (1).

Il revient donc au même de résoudre (1) ou de résoudre (2). Nous ne modifions pas les solutions de l'inéquation (1) en divisant les deux membres par 7; de la même façon, nous ne modifions pas les solutions de l'inéquation (2) en multipliant ses deux membres par 7.

Nous aurions pu aussi diviser les deux membres de l'inéquation (1) par — 7. Mais alors, l'on a :

$$a>b \iff \frac{a}{-7}<\frac{b}{-7}.$$

En sorte que l'on aurait obtenu l'inéquation :

$$-(x-5)+2(x-1)<-5(x-1). \quad (3)$$

De même, on aurait pu multiplier les deux membres de l'inéquation (3) par — 7. Mais alors, l'on a :

$$a'<b' \iff -7a'>-7b'.$$

En sorte que l'on aurait obtenu l'inéquation :

$$7(x-5)-14(x-1)>35(x-1). \quad (1)$$

Il revient donc au même de résoudre (1) ou de résoudre (3). Nous ne modifions pas les solutions de l'inéquation (1) en divisant les deux membres par -7, *mais il faut changer le sens de l'inéquation*; de la même façon, nous ne modifions pas les solutions de l'inéquation (3) en multipliant ses deux membres par -7, mais il faut changer le sens de l'inéquation.

▪ THÉORÈME. — ***1° On ne modifie pas les solutions d'une inéquation, si elles existent, en multipliant ou en divisant ses deux membres par un même nombre positif et en conservant le sens de l'inéquation.***
2° On ne modifie pas les solutions d'une inéquation, si elles existent, en multipliant ou en divisant ses deux membres par un même nombre négatif, mais il faut changer le sens de l'inéquation.

On profitera de cette règle pour faire, sur les inéquations, la transformation qui a permis, sur les équations, de *supprimer les dénominateurs* (n° 131).

EXEMPLE. Soit l'inéquation :

$$\frac{(x+1)^2}{15}-\frac{x(x-3)}{6} \geqslant \frac{(x-4)(1-x)}{10}. \qquad (1)$$

On multiplie les deux membres par le plus petit multiple commun de 15, 6 et 10 qui est 30. On obtient :

$$2(x+1)^2-5x(x-3) \geqslant 3(x-4)(1-x). \qquad (2)$$

On effectue les calculs indiqués et l'on trouve :

$$2(x^2+2x+1)-5(x^2-3x) \geqslant 3(-x^2+5x-4),$$
$$2x^2+4x+2-5x^2+15x \geqslant -3x^2+15x-12. \qquad (3)$$

Après réduction et transposition, on obtient :

$$4x+14 \geqslant 0. \qquad (4)$$

En divisant par 2 chaque membre, l'on obtient :

$$2x+7 \geqslant 0. \qquad (5)$$

Il revient au même de résoudre l'inéquation (1) ou l'inéquation (5).

• REMARQUE IMPORTANTE. Quand on désire multiplier (ou diviser) les deux membres d'une inéquation par un même nombre non nul, il est indispensable de connaître le signe de ce nombre puisque, suivant que ce nombre est positif ou négatif, on ne change pas ou l'on change le sens de l'inéquation.

• **Applications.**

Mettre les inéquations entières suivantes sous l'une des formes :

$$P(x) > 0, \quad P(x) < 0, \quad P(x) \geqslant 0, \quad P(x) \leqslant 0$$

en désignant par P (x) *un polynome réduit. Indiquer le degré de chaque inéquation.*

540. $3x + 13 < 5x - 17; \quad 4x + 1 \geqslant x - 2.$

541. $5(x - 4) + \frac{3}{4} > 7(x - 3) + \frac{1}{4} - (x + 4).$

542. $(5x + 3) + 2x - 1 \leqslant (3x - 2) + 12.$

543. $x^2 + (x - 1)^2 > 2x(x - 1); \quad 3x^2 - (x^2 + 4x) \leqslant 5(x - 3) + x^2.$

544. $4(x^2 - 5x - 1) - 3(x^2 + x - 3) < 5(x^2 + x + 1) - 4(x^2 - 1).$

545. — *Démontrer que les inéquations suivantes sont impossibles :*

$$4x + 3 < 4x - 1; \quad x - 1 \geqslant x + 1;$$
$$x^2 + 4 < 0; \quad (x - 4)^2 \leqslant -1; \quad x^4 < -3x^2.$$

546. — *Démontrer que les inéquations suivantes sont vérifiées quelle que soit la valeur de* x *:*

$$x - 1 \leqslant x; \quad 3x - 5 < 3x + 7;$$
$$(x - 1)^2 > x^2 - 2x; \quad (3x - 2)^2 - 5 < 3x(3x - 4).$$

547. — *Multiplier les deux membres de chacune des inéquations par le nombre donné :*

$$-2x + 5 < -3x - 2, \quad \text{par } -1;$$
$$\frac{4}{3}x + \frac{2}{9} < \frac{7}{5}x - \frac{2}{15}, \quad \text{par } 45;$$
$$18x - 15 < 9x + 12, \quad \text{par } \frac{1}{3}.$$

548. — *Démontrer que l'inéquation :*

$$x^2 - 2ax + a^2 > 0$$

est vérifiée pour toutes les valeurs du nombre connu a *sauf pour une valeur que l'on précisera.* (¶ Remarquer que le premier membre est le carré d'une différence.)

549. — *Démontrer que, si* a *et* b *sont deux nombres positifs distincts, l'inégalité :* $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ *est vérifiée.*

II. INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

Travaux pratiques d'initiation.

1° Comment faut-il choisir x pour que l'on ait :

$x - 3 > 0$? $\quad x - 2 < 0$? $\quad x - \sqrt{3} \geqslant 0$?
$2x > 4$? $\quad 5x < 3$? $\quad 3x \leqslant 1$?

2° Peut-on trouver un nombre x tel que l'on ait simultanément :

$x - 5 > 0$; $\quad x + 1 > 0$; $\quad x + 3 > 0$?

3° Même question pour :

$x - 4 \leqslant 0$, $\quad x - 2 < 0$; $\quad x + 2 \geqslant 0$.

4° Même question pour :

$x - 7\sqrt{2} \geqslant 0$; $\quad x - 3\sqrt{11} < 0$.

141. Résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue. Nous raisonnons d'abord sur des exemples.

I. Supposons qu'après réduction des termes et transposition dans un seul membre, nous soyons parvenus à l'inéquation :

$$5x - 2 > 0. \tag{1}$$

1° *Si nous supposons qu'un nombre x_0 est solution de cette inéquation*, on aura l'inégalité numérique :

$$5x_0 - 2 > 0,$$

laquelle signifie, par définition, que $5x_0$ est plus grand que 2 :

$$5x_0 > 2.$$

En divisant les deux membres par le nombre positif 5, on en déduit :

$$x_0 > \frac{2}{5}.$$

2° *Réciproquement*, soit un nombre x_1 supérieur à $\frac{2}{5}$. On a les implications suivantes :

$x_1 > \frac{2}{5} \Longrightarrow 5x_1 > 2$ (multiplication des deux membres par le nombre positif 5);

$5x_1 > 2 \Longrightarrow 5x_1 - 2 > 0$ (définition de l'inégalité).

Les solutions de l'inéquation (1) sont tous les nombres supérieurs à $\frac{2}{5}$.

II. Soit à résoudre l'inéquation :

$$-5x + 6 \leqslant 0. \qquad (2)$$

1° Si x_0 est une solution, on écrira :

$-5x_0 + 6 \leqslant 0 \implies -5x_0 \leqslant -6$ (en transposant 6)

$-5x_0 \leqslant -6 \implies x_0 \geqslant \frac{-6}{-5}$ (en divisant les deux membres par le nombre négatif -5).

ou : $x_0 \geqslant \frac{6}{5}$

2° *Réciproquement*, soit x_1 un nombre supérieur ou égal à $\frac{6}{5}$, on a :

$x_1 \geqslant \frac{6}{5} \implies -5x_1 \leqslant -6$ (en multipliant les deux membres par le nombre négatif -5)

$-5x_1 \leqslant -6 \implies -5x_1 + 6 \leqslant 0$ (en transposant -6).

Les solutions de l'inéquation (2) sont tous les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{6}{5}$.

142. Cas général.

Lorsqu'une inéquation du premier degré à une inconnue a été réduite, elle se présente sous la forme :

$$ax + b > 0, \qquad (3)$$

où a et b sont des coefficients (nombres supposés connus mais non précisés) et où x est l'inconnue.

Nous supposerons que le coefficient a n'est pas nul sans quoi l'inéquation n'existerait pas.

En raisonnant comme sur les exemples, qui ont montré l'importance du signe de a, on aboutit aux conclusions suivantes :

$$\boldsymbol{ax + b > 0 \iff \begin{cases} a > 0 & x > -\frac{b}{a} \\ a < 0 & x < -\frac{b}{a} \end{cases}}$$

EXEMPLES. I. *Résoudre l'inéquation :*

$$\frac{x-1}{6}-\frac{2x+1}{4}<\frac{2x}{15}-1.$$

En multipliant les deux membres par 60, on obtient :

$$10(x-1)-15(2x+1)<8x-60,$$

ou :

$$-20x-25<8x-60,$$

soit :

$$-28x<-35.$$

Par suite : $x>\frac{-35}{-28}$, soit : $x>\frac{7}{4}$.

II. *Résoudre l'inéquation :*

$$3(x-5)\geqslant x^2-5x+3-(x^2-8x).$$

En réduisant on trouve :

$$3x-15\geqslant 3x+3.$$

Sous cette forme, on aperçoit une impossibilité. D'ailleurs, en transposant, on obtient :

$$3x-3x\geqslant 3+15, \quad \text{ou :} \quad 0\geqslant 18, \quad \text{ce qui est faux.}$$

L'inéquation proposée n'a pas de solution.

143. Interprétation graphique. — Soit la fonction : $y=3x-4$.

Elle est représentée graphiquement par une droite (D). Sur la *figure 87*, la droite (D) a été construite à l'aide des points :

$$A(0,-4); \qquad B(2,2).$$

Elle coupe $x'x$ au point C d'ordonnée 0 et dont l'abscisse est la racine de l'équation :

$$0=3x-4; \quad \text{d'où :} \quad x=\frac{4}{3}.$$

Ce point C sépare la droite (D) en deux demi-droites opposées Ct et Ct'. Tout point M de Ct a une ordonnée y positive et, par conséquent, une abscisse x telle que :

$$3x-4>0. \qquad (1)$$

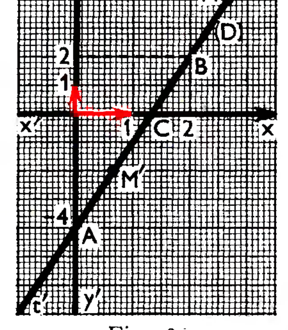


Fig. 87.

Les abscisses des points de Ct sont donc les solutions de l'inéquation (1).

De même les abscisses des points M′ de la demi-droite Ct' sont les solutions de l'inéquation :

$$3x-4<0 \qquad (2)$$

puisque les ordonnées y de ces points sont négatives.

144. Utilisation d'un axe pour représenter les solutions d'une inéquation. — Sur un axe $x'x$ marquons un point initial O et, par exemple, le point A d'abscisse -2 (*fig. 88*).

Soit M un point quelconque autre que A, de la demi-droite Ax. Si x est son abscisse, elle vérifie l'inégalité : $x > -2$.

Ainsi, la demi-droite Ax porte tous les points (A excepté) dont l'abscisse est supérieure à -2 et la demi-droite Ax' (A excepté) ceux dont l'abscisse est inférieure à -2. De sorte que, si la solution d'une inéquation est $x > -2$, on pourra les représenter de la façon suivante :

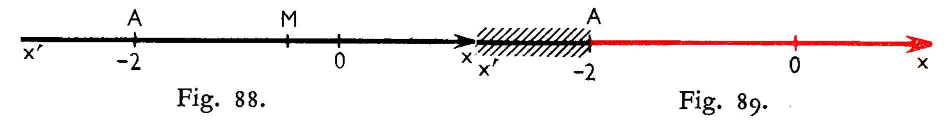


Fig. 88. Fig. 89.

On barre (*fig. 89*) par des hachures la demi-droite Ax' ; la demi-droite Ax porte tous les points dont les abscisses constituent la solution de l'inéquation donnée.

Si la solution est $x \geqslant -2$, l'abscisse de A fait partie de la solution.

145. Inéquations simultanées. — On appelle inéquations simultanées des inéquations qui doivent être vérifiées par les mêmes valeurs de l'inconnue.

La méthode du n° 144 est commode pour représenter les solutions d'inéquations simultanées. Supposons, par exemple, que trois inéquations simultanées aient donné, pour chacune d'elles prise séparément, les résultats respectifs suivants : $x < \frac{5}{2}$; $x > -1$; $x < 1$.

On construit un axe $x'x$ sur lequel on hachure (de manières différentes pour s'y reconnaître) les parties qui ne conviennent pas. La figure montre immédiatement que les valeurs de x qui satisfont simultanément aux trois inéquations sont celles qui sont comprises entre -1 et $+1$ (*fig. 90*).

Fig. 90. Fig. 91.

Lorsque les inéquations n'admettent pas de solution commune (on dit qu'elles sont *incompatibles*), aucune partie non barrée de l'axe ne subsiste. Ainsi, si le calcul donne successivement :

$x > +3$; $x \leqslant -1$, on obtient la *figure 91*, qui montre que tout l'axe est barré.

EXEMPLES. I. *Existe-t-il des valeurs de x qui vérifient à la fois les inéquations :*

$$2x - 3 > 5x - 1 \quad (1)$$

et :

$$x + 4 \geqslant 3x - 2 ? \quad (2)$$

L'inéquation (1) donne : $3x < -2$, ou : $x < -\frac{2}{3}$.

L'inéquation (2) donne : $2x \leqslant 6$, ou : $x \leqslant 3$.

Elles sont vérifiées simultanément si l'on prend (*fig. 92*) :

$$\boxed{x < -\frac{2}{3}}$$

x' $-\frac{2}{3}$ 0 3 x

Fig. 92.

II. *Même question pour :*

$$2x - 3 > x + 1 \quad (1)$$

et :

$$3x - 1 \leqslant 2x + 7. \quad (2)$$

L'inéquation (1) est vérifiée par : $x > 4$.
L'inéquation (2) est vérifiée par : $x \leqslant 8$.
Elles sont vérifiées simultanément si l'on prend (*fig. 93*) :

$$\boxed{4 < x \leqslant 8}$$

x' 0 4 8 x

Fig. 93.

x doit être compris entre 4 et 8, avec la possibilité d'être égal à 8.

III. *Même question pour :* $3x - 2 < x + 6$ (1)

et : $2x - 1 > x + 5$. (2)

L'inéquation (1) est vérifiée par : $x < 4$.
L'inéquation (2) est vérifiée par : $x > 6$.
Un nombre inférieur à 4 ne peut être en même temps supérieur à 6.
Ces deux inéquations sont donc incompatibles.

- **Applications.**

Résoudre les inéquations suivantes :

550. $4x - 5 > 0$; $3x - \frac{1}{2} < 0$.

551. $5x - 7 \geqslant 0$; $4x + \frac{5}{4} \leqslant 0$.

552. $3x - 2 > x + 5$; $2x - \frac{1}{3} < 3x - \frac{1}{4}$.

553. $(4x + 3) + (x - 1) > x - 2 + 12$.

554. $(6x + 2) - (4x - 8) \leqslant (5x - 1) + (3x - 5)$.

555. $2x - 5 \leqslant 5x + 7$; $\frac{3x + 1}{4} > \frac{5x + 1}{6}$.

Résoudre les inéquations suivantes, après les avoir simplifiées :

556. $4x + 8 \leqslant 16 - 12x$. (¶ Diviser les deux membres par 4.)

557. $24(x + 7) > 36(x - 2) + 12$. (¶ Diviser les deux membres par 12.)

558. $0{,}7x + 1{,}4(x + 2) \leqslant 2{,}8(3 - x) + 3{,}5$. (¶ Diviser les deux membres par 0,7.)

559. $\frac{7x - 5}{2} - \frac{8x - 6}{3} > \frac{3x + 7}{4} + 1$. (¶ Multiplier les deux membres par 12.)

560. $\frac{2x + 1}{3} - \frac{x - 1}{5} \leqslant \frac{9x + 8}{15}$. (¶ Multiplier les deux membres par 15.)

561. $\frac{6 - x}{8} > \frac{3x + 2}{6}$; $\frac{x - 1}{4} - 5 \leqslant \frac{2x - 3}{2} + \frac{3}{4}$.

Résoudre les inéquations suivantes et représenter les solutions de chacune sur un axe :

562. $2x - 5 > x + 3$; $5 - 2x > x - 3$.

563. $2x - \frac{x - 1}{5} \geqslant \frac{1}{4} - x$; $\frac{2x - 3}{5} \geqslant \frac{2 - x}{3}$.

Résoudre les inéquations simultanées suivantes et représenter les solutions sur un axe :

564. $\begin{cases} 3x - 5 > 0 \\ 2x - 11 < 0 \end{cases}$ **565.** $\begin{cases} 2x - 7 \leqslant 0 \\ 3x - 2 < 0 \end{cases}$ **566.** $\begin{cases} 5x - 8 > 0 \\ 3x + 22 > 0. \end{cases}$

567. $\begin{cases} 3x - 5 > 2x - 1 \\ 5x - 8 < 3x + 2 \end{cases}$ **568.** $\begin{cases} 2x - 3 < 4 - 5x \\ \frac{7x - 8}{6} \geqslant x - 1 \end{cases}$

569. $\begin{cases} \frac{3x}{4} - \frac{2}{3} \leqslant \frac{4x - 3}{12} \\ 2x - 1 > \frac{3x - 4}{2} \end{cases}$ **570.** $\begin{cases} x - 1 > \frac{7x - 2}{3} \\ 4{,}5x + 2{,}5 < 3x + 2 \end{cases}$

571. — 1° *Tracer le graphique de la fonction :*

$$y = 5 - 2x$$

et déterminer l'abscisse de son point d'intersection avec l'axe Ox.

2° *Utiliser le graphique pour résoudre l'inéquation :*

$$5 - 2x > 0.$$

572. — *Reprendre l'exercice précédent avec la fonction :*

$$y = 4x + 7$$

pour résoudre l'inéquation : $4x + 7 \leqslant 0$.

Résoudre les inéquations simultanées :

573. $-2 < 8x + 5 < 3$. **574.** $-3 < 4x - 3 < 5$.

575. $-5 < 8 - 5x < \frac{11}{3}$. **576.** $-1 < 3x + 11 \leqslant 5$.

577. $-4 > 8 - 3x > -10$. **578.** $-11 \leqslant 2x - 7 < 7$.

III. EXEMPLES D'AUTRES INÉQUATIONS

146. Signe d'un produit de polynomes du premier degré.

I. **Première méthode.** — On étudie le signe de chaque facteur et on rassemble les résultats.

EXEMPLES. I. *Résoudre l'inéquation :*

$$(x-3)(5x-1) > 0.$$

Nous étudions le signe de chaque facteur.

$(x-3)$ est nul si $x = 3$, positif si $x > 3$, négatif si $x < 3$.

$(5x-1)$ est nul si $x = \frac{1}{5}$, positif si $x > \frac{1}{5}$, négatif si $x < \frac{1}{5}$.

Nous rangeons les nombres 3 et $\frac{1}{5}$ par ordre de grandeur croissante en les disposant sur une ligne. Cette ligne schématise l'échelle des nombres réduite aux seuls nombres qui nous intéressent.

Dressons alors le tableau suivant :

x		$\frac{1}{5}$		3	
$x-3$	$-$	|	$-$	0	$+$
$5x-1$	$-$	0	$+$	|	$+$
$(x-3)(5x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Nous avons écrit dans une première colonne les expressions dont nous étudions le signe. En face de $x-3$, les signes $-$, $-$, $+$ indiquent que, lorsque x est inférieur à $\frac{1}{5}$, $x-3$ est négatif, qu'il en est de même lorsque x est compris entre $\frac{1}{5}$ et 3 et que $x-3$ est positif lorsque x est supérieur à 3.

Le signe de facteur $5x-1$ est noté de la même manière. Dès lors, le signe du produit est connu et la dernière ligne permet de lire le résultat cherché.

L'inéquation proposée est vérifiée pour :

$$\boxed{x < \frac{1}{5}} \quad \text{et} \quad \boxed{x > 3}$$

II. *Résoudre l'inéquation :*

$$(2-x)(x+1)(3x+4) \leqslant 0.$$

$2-x$ est nul si $x=2$, positif si $x<2$, négatif si $x>2$;
$x+1$ est nul si $x=-1$, positif si $x>-1$, négatif si $x<-1$;
$3x+4$ est nul si $x=-\frac{4}{3}$, positif si $x>-\frac{4}{3}$, négatif si $x<-\frac{4}{3}$.

D'où le tableau (dressé comme on l'a expliqué à l'exemple précédent).

x		$-\frac{4}{3}$		-1		2	
$2-x$	+		+		+	0	−
$x+1$	−		−	0	+		+
$3x+4$	−	0	+		+		+
produit	+	0	−	0	+	0	−

L'inéquation proposée est vérifiée pour :

$$\boxed{-\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant -1} \quad \text{et} \quad \boxed{x \geqslant 2}$$

II. **Deuxième méthode.** Supposons qu'un produit de binomes du premier degré en x se présente sous la forme :

$$P = (x-a)(x-b)(x-c)(\ldots)(\ldots).$$

Les facteurs s'annulent pour les valeurs respectives $a, b, c \ldots$ de x. On sait que $x-a$ est positif pour $x > a$. Si l'on a alors :

$$a > b > c > \ldots$$

on en déduit : $x-a < x-b < x-c < \ldots$ quel que soit x.

Par conséquent, lorsque $x-a$ est positif, les autres facteurs sont aussi positifs et le produit P est positif. Nous en concluons que $x > a \Longrightarrow P > 0$.

Exemples. I. *Résoudre l'inéquation :*

$$(x-5)(x+1)(x-2)(x+3) > 0.$$

Les facteurs successifs s'annulent respectivement pour les valeurs de x :

$$5; \quad -1; \quad 2; \quad -3.$$

Nous rangeons ces valeurs par ordre croissant :

$$-3; \quad -1; \quad 2; \quad 5.$$

D'après ce qui précède, nous concluons que pour $x > 5$ tour les facteurs sont positifs et l'inéquation est vérifiée.

Si, maintenant, x prend une valeur comprise entre 2 et 5, seul le facteur $x - 5$ change de signe et le produit change de signe. Ce produit est donc négatif pour $2 < x < 5$. Le raisonnement se poursuit : si x prend une valeur comprise entre -1 et $+2$, le facteur $x - 2$ devient négatif, le produit change à nouveau de signe et devient positif, etc.

Fig. 94.

Le schéma (*fig. 94*) indique les changements de signe du produit pour les valeurs de x appartenant aux intervalles séparés par les racines des facteurs.

En supprimant les intervalles dans lesquels le produit est négatif, le schéma fournit les solutions :

$$x < -3; \qquad -1 < x < 2; \qquad x > 5.$$

II. *Résoudre l'inéquation :*

$$(3x + 1)(x - 2)(5x + 4) < 0.$$

En divisant par les coefficients de x dans le premier et troisième facteur, on est ramené à l'inéquation :

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2)\left(x + \frac{4}{5}\right) < 0.$$

Les facteurs s'annulent pour les valeurs respectives : $-\frac{1}{3}$; $\quad 2$; $\quad -\frac{4}{5}$,

que nous rangeons par ordre croissant : $-\frac{4}{5}$; $\quad -\frac{1}{3}$; $\quad 2$.

Pour $x > 2$, le produit des facteurs est positif. En raisonnant comme à l'exemple I, on en déduit le schéma (*fig. 95*) et les solutions :

$$x < -\frac{4}{5} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{3} < x < 2.$$

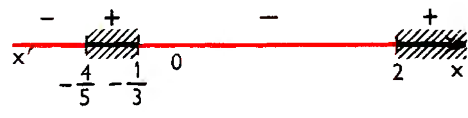


Fig. 95.

III. *Résoudre l'inéquation :*

$$(3x - 2)(4 + x)(2x + 5)(3 - 2x) > 0.$$

On change le signe du dernier facteur en le remplaçant par son opposé $2x - 3$ (*de façon que tous les coefficients de* x *soient positifs*). On obtient l'inéquation :

$$(3x - 2)(4 + x)(2x + 5)(2x - 3) < 0.$$

On opère ensuite comme à l'exemple II :

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 4)\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) < 0.$$

Les valeurs de x qui annulent les facteurs sont : $\frac{2}{3}$; -4; $-\frac{5}{2}$; $\frac{3}{2}$ ou, en les rangeant par ordre croissant :

$$-4; \quad -\frac{5}{2}; \quad \frac{2}{3}; \quad \frac{3}{2}.$$

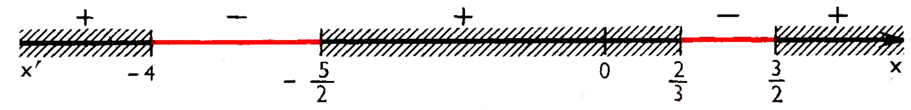


Fig. 96.

On obtient le schéma (*fig. 96*) et les solutions :

$$-4 < x < -\frac{5}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}.$$

147. Inéquations rationnelles. — Si l'inéquation proposée contient des dénominateurs où figure l'inconnue, on réunit tous les termes dans un même membre et l'on donne à l'inéquation la forme :

(1) $$\frac{P}{Q} > 0$$

$$\left(\text{ou } \frac{P}{Q} \geqslant 0 \quad \text{ou } \frac{P}{Q} < 0 \quad \text{ou } \frac{P}{Q} \leqslant 0 \quad \text{selon les cas}\right).$$

P et Q étant des polynomes dont on s'efforce de déterminer les signes, ce qui sera facile si P et Q sont des polynomes du premier degré ou des produits de polynomes du premier degré. On en déduira le signe du quotient $\frac{P}{Q}$.

EXEMPLES. I. *Résoudre l'inéquation :*

$$\frac{x-3}{x-1} \geqslant \frac{2}{3}.$$

La fraction rationnelle $\frac{x-3}{x-1}$ n'a pas de sens si $x = 1$.

Nous éviterons de multiplier par $(x - 1)$ dont le signe dépend de x. Nous transposons les termes du second membre dans le premier membre et réduisons en une seule fraction :

$$\frac{x-3}{x-1} - \frac{2}{3} \geqslant 0;$$

$$\frac{3(x-3) - 2(x-1)}{3(x-1)} \geqslant 0;$$

ou, en réduisant :

$$\frac{x-7}{3(x-1)} \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x-7}{x-1} \geqslant 0 \quad \text{(puisque 3 est positif).}$$

$x-7$ est nul si $x = 7$, positif si $x > 7$, négatif si $x < 7$;
$x-1$ est nul si $x = 1$, positif si $x > 1$, négatif si $x < 1$.

x		1	7
$x-7$	$-$	‖	$-$ 0 $+$
$x-1$	$-$	‖	$+$ | $+$
$\frac{x-7}{x-1}$	$+$	‖	$-$ 0 $+$

Nous avons mis dans le tableau un double trait sous 1 pour rappeler que la valeur numérique $x = 1$ est interdite.

Les solutions de l'inéquation proposée sont :

$$\boxed{x < 1} \quad \text{et} \quad \boxed{x \geqslant 7}$$

II. *Trouver les valeurs de* x *qui vérifient la double inéquation :*

$$-1 < \frac{x}{x-3} < +2. \tag{1}$$

Valeur interdite : $x = 3$. Il s'agit de deux inéquations simultanées :

$$\frac{x}{x-3} > -1, \tag{2}$$

$$\frac{x}{x-3} < 2. \tag{3}$$

L'inéquation (2) s'écrit :

$$\frac{x}{x-3} + 1 > 0; \qquad \frac{x+(x-3)}{x-3} > 0; \qquad \frac{2x-3}{x-3} > 0.$$

L'inéquation (3) s'écrit :

$$\frac{x}{x-3} - 2 < 0; \qquad \frac{x-2(x-3)}{x-3} < 0; \qquad \frac{-x+6}{x-3} < 0.$$

On aboutit au tableau suivant :

x		$\frac{3}{2}$	3	6
$2x - 3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$-x + 6$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{2x-3}{x-3}$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\frac{-x+6}{x-3}$	$-$	$-$	$+$	$-$

Les inéquations (2) et (3) sont donc satisfaites simultanément pour :

$$x < \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x > 6$$

Ces valeurs de x sont les solutions de la double inéquation (1).

- **Applications.**

Résoudre les inéquations suivantes :

579. $(x - 1)(x + 2) < 0;$ $(3x - 1)(2x + 5) > 0.$

580. $3(x - 2)(2x + 1) \geqslant 0;$ $5(x^2 + 1)(3x - 4) \leqslant 0.$

581. $(x - 2)(3x + 5)(7x - 3) < 0;$ $(3x^2 + 1)(2x - 9) \geqslant 0.$

582. $x(x - 1)(x - 2) \geqslant 0;$ $(x - 1)(x + 2)(x - 3) > 0.$

Résoudre les inéquations suivantes après avoir mis le premier membre sous la forme d'un produit :

583. $x^2 - 9 < 0;$ $x(x - 5) - 4(x - 5) \geqslant 0.$

584. $x^2 + 3x > 0;$ $5x^2 - 8x \leqslant 0.$

585. $(3x + 5)^2 - 1 \geqslant 0;$ $(3x + 2)^2 - (x - 1)^2 \leqslant 0.$

586. $(x^2 - 1)(x^2 - 4) \leqslant 0;$ $(2 - x)(x^2 - 1) > 0.$

Résoudre les inéquations suivantes :

587. $\frac{3x + 2}{x^2 + 1} > 0;$ $\frac{2x - 11}{x^2} \geqslant 0.$

588. $\frac{3x - 8}{2x + 5} \geqslant 0;$ $\frac{4x - 9}{5x - 11} < 0.$

589. $1 > \dfrac{2}{x}$; $\dfrac{3}{x} \geqslant 1$.

590. $\dfrac{x}{2 - x} > 0$; $\dfrac{x - 1}{x + 1} > 2$.

591. $\dfrac{1 - x}{1 + x} > 0$; $\dfrac{1 - x}{1 + x^2} \geqslant 0$.

592. $\dfrac{x - 1}{x + 1} > 2$; $\dfrac{2x - 1}{x + 1} < 2$.

593. $\dfrac{3x}{x - 1} < -3$; $\dfrac{3x - 2}{5 - 3x} \geqslant 1$.

Résoudre les inéquations simultanées :

594. $2 < \dfrac{2x - 1}{x + 3} \leqslant 4$.

595. $-2 < \dfrac{x + 1}{x - 1} < 0$.

596. $2 < \dfrac{x}{x - 2} < 3$.

597. $0 < \dfrac{x - 2}{x + 2} < 1$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

★

Résoudre les inéquations :

598. $(7x - 14) + (6x - 2) - (4x - 8) > 3x + 4 - (x + 16)$.

599. $8(3x - 5) - 5(2x - 8) \leqslant 4(3x - 1) + 16$.

600. $12(3 - x) - 4(3 - 5x) > 7(x + 5) - 17$.

Résoudre après simplification :

601. $15(3x - 4) + 6(5 - 2x) \geqslant 9(3x - 1) - 66$.

602. $3{,}6(3 - 2x - 24(3 - x) \geqslant 1{,}8(5 - x) - 12$.

603. $4{,}5 + 1{,}5(2x - 3) < 6(x + 1) + 9$.

604. $5 - \dfrac{x}{4} \geqslant \dfrac{2x - 1}{3}$; $\dfrac{x - 2}{3} > \dfrac{4x + 1}{2}$.

Résoudre les inéquations :

605. $4x^2 - 9 < 0$; $(x + 1)^2 - 4 \geqslant 0$.

606. $13x^2 + 7x \geqslant 0$; $-4x^2 + 3x < 0$.

607. $-2(x^2 + 1) < 0$; $5(x^2 + 10) > 0$.

608. $(x + 7)^2 - x^2 \geqslant 0$; $(3x - 2)^2 - (2x + 11)^2 < 0$.

609. $\dfrac{x^2 - 4}{3x + 5} > 0$; $\dfrac{7x - 2}{4x^2 - 1} < 0$.

610. $\frac{7x-4}{2x-1}-\frac{7x+3}{2x}<0$; $\frac{5x+2}{5x-3}<\frac{2x+5}{2x-3}$.

611. $(x-1)(x-2)<(x-3)(x-4)$; $x^2+5x+9<x(x-1)+12$.

612. $\frac{x}{x-1}>1$; $\frac{x}{x-2}<1$.

613. $\frac{x-2}{x-3}>\frac{2}{5}$; $\frac{4-x}{2-3x}<\frac{1}{2}$.

614. $\frac{x-2}{x-3}-\frac{2x+11}{2x+9}<\frac{17}{(x-3)(2x+9)}$.

615. $\frac{3x+2}{x-1}+\frac{2x-4}{x+2}\leqslant 5$.

Résoudre les inéquations suivantes en rendant entiers les dénominateurs des nombres qui limitent les solutions.

616. $x\sqrt{2}-1<x+2$; $x\sqrt{3}+1\geqslant x+3$.

617. $x-1>\sqrt{3}(x-3)$; $x+2\leqslant\sqrt{2}(x+1)$.

618. $2x+1>\sqrt{2}(x+1)$; $3x-1<\sqrt{3}(x+1)$.

619. — On trace un cercle de rayon 5 cm et un cercle de rayon $R>5$ cm. La distance des centres est $2(R-5)$. Comment faut-il choisir R pour que les deux cercles soient sécants?

620. — 1° Les côtés d'un triangle ont pour mesures, avec la même unité, 5, $3+x$ et $3-x$, x étant un nombre inférieur à 3. Comment faut-il choisir x pour que le triangle existe? (¶ *Écrire que la longueur 5 est comprise entre la différence et la somme des deux autres longueurs.*)

2° Même problème avec les mesures 12, 5 et $4+x$. (¶ *Écrire que la longueur $4+x$ est comprise entre la différence et la somme des deux autres longueurs.*)



Résoudre les équations simultanées :

621. $\begin{cases} 2x+1<7-x \\ 2x+3<3x+2. \end{cases}$

622. $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{1}{2}>x-\frac{1}{3} \\ \frac{x+1}{x}>\frac{x-1}{2x}. \end{cases}$

623. $\begin{cases} \frac{x-1}{4}<\frac{x+3}{2} \\ \frac{x+1}{x-1}>\frac{x+3}{x+1}. \end{cases}$

624. $\begin{cases} \frac{3x}{x-1}>4 \\ \frac{x}{x+1}<2. \end{cases}$

625. $\begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(2x-3)} > 0 \\ \dfrac{(1-x)(x+2)}{x} < 0. \end{cases}$

626. $\begin{cases} \dfrac{x\sqrt{2}-1}{x-\sqrt{2}} < 0 \\ \dfrac{x\sqrt{3}-1}{2x-\sqrt{3}} > 0. \end{cases}$

627. $2 < \dfrac{2x-1}{x+3} \leqslant 4.$

628. $0 \leqslant 1 - \dfrac{2}{x} < 3.$

Résoudre les inéquations :

629. $x(x^2-1) + 3x^2 - 5 \leqslant (x+1)^3 - \dfrac{5x}{2}.$

630. $(4x-1)(x-2)(x+1)(2-3x) < 0.$

631. $(2x-1)^3(x+3)^2(3-4x)(x+10) > 0.$

632. — 1° Par rapport aux mêmes axes tracer les graphiques des fonctions :

$$y_1 = 3x - 2$$
$$y_2 = 2x + 1$$

et calculer l'abscisse x_0 de leur point d'intersection.

2° Montrer, à l'aide du graphique que $y_1 > y_2$ lorsque $x > x_0$ et que $y_1 < y_2$ lorsque $x < x_0$.

3° Utiliser la même méthode pour résoudre graphiquement l'inéquation :

$$4x + 5 < 2x + 3.$$

633. — Deux cercles ont pour rayons respectifs $R = 2x - 1$, $R' = 4x - 3$ et la distance de leurs centres est égale à $3x$.

1° Comment faut-il choisir le nombre x pour que R et R' soient positifs?

2° Comment faut-il choisir x pour que $R < R'$? pour que $R > R'$?

3° Pour quelles valeurs de x les deux cercles sont-ils extérieurs?

4° Pour quelles valeurs de x les deux cercles sont-ils sécants?

634. — 1° Résoudre l'inéquation : $|x| > x$.

(¶ *Distinguer les deux cas* : $x \geqslant 0$ *et* $x < 0$.)

2° Résoudre l'inéquation : $|x-3| < x-3$.

635. — Résoudre l'inéquation : $5 + |x| < 2x - 4$.

636. — Résoudre l'inéquation : $2x^2 - |x| > 0$.

637. — Résoudre l'inéquation : $5\sqrt{x^2} - |x| < 8$.

638. — Démontrer que l'inéquation : $\dfrac{3x+2}{3|x|+2} < -1$.

est impossible.

★ ★ ★

639. — On donne les fonctions :

$$y = 3x - 1; \qquad y = 2x + m,$$

m étant un nombre supposé connu.

1° Déterminer, en fonction de m, les coordonnées x_0, y_0 du point A commun aux graphiques des deux fonctions.

Comment choisir m pour que $x_0 < y_0$?

2° Trouver, par les graphiques, la valeur de m pour laquelle l'on a l'équivalence logique :

$$x > 4 \iff \begin{cases} 3x - 1 > 11 \\ 2x + m > 11. \end{cases}$$

640. — On dispose de n objets que l'on se propose de ranger en carré comme l'indique le schéma ci-contre dans un cas particulier (autant de lignes que d'objets dans chacune de ces lignes).

● ● ● ●
● ● ● ●
● ● ● ●
● ● ● ●

1° En plaçant sur chacun des côtés du carré le plus grand nombre possible d'objets, on obtient x rangées de x objets chacune et 10 objets sont inutilisés. Montrer que x ne peut être inférieur à 5.

2° Si l'on voulait réaliser un carré avec $x + 2$ rangées de $x + 2$ objets chacune, il manquerait 18 objets. Déterminer x, puis n.

3° Le problème reste-t-il possible si, les autres données du 1° et du 2° restant les mêmes, on remplace le nombre 18 du 2° par le nombre 16? Même question si l'on remplace 18 par 6.

4° Les autres données du 1° et du 2° restant les mêmes, on remplace le nombre 18 du 2° par le nombre entier p. Déterminer les nombres p qui permettent de résoudre le problème proposé. Trouver les trois plus petites valeurs de n.

(Admission aux E. N.).

641. — On donne la fonction : $y = (a - 1)x + 3a - 5$,
a étant un nombre donné différent de 1.

1° Déterminer, en fonction de a, l'abscisse x_0 du point d'intersection de la droite représentative de la fonction avec l'axe Ox.

Comment faut-il choisir le nombre a pour que $-1 < x_0 < 0$?

2° Lorsque a remplit les conditions pour que $-1 < x_0 < 0$, entre quelles limites peut varier l'ordonnée à l'origine de la droite représentative de la fonction?

642. — On donne la fonction : $y = mx - 2m + 3$,
m étant un nombre donné non nul.

1° Déterminer, en fonction de m, l'abscisse du point d'intersection du graphique de cette fonction avec l'axe des x. Comment faut-il choisir m pour que cette abscisse soit positive?

2° Comment faut-il choisir m pour que l'ordonnée du point d'intersection du graphique de la fonction avec l'axe des y soit inférieure à 1?

3° Peut-on choisir m de manière que la droite représentant les variations de la fonction ait un coefficient de direction positif, une ordonnée à l'origine inférieure à 1 et que son point d'intersection avec l'axe des x ait une abscisse positive?

CHAPITRE IX

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

I. UNE ÉQUATION A DEUX INCONNUES

Travaux pratiques d'initiation.

1° Que pensez-vous de l'énoncé suivant : Dans une usine on emploie des ouvriers et des ouvrières. Il y en a 500 en tout. Quel est le nombre d'ouvriers? Compléter l'énoncé (de diverses façons) pour que le problème admette une seule réponse.

2° On donne l'équation : $2x - 4y = 7$ à deux inconnues x et y. Compléter le tableau ci-dessous pour que les valeurs indiquées vérifient l'équation (on choisit tantôt x, tantôt y).

x	0		3		-1		$\frac{2}{3}$		$-\frac{4}{3}$	
y		-2		$\frac{1}{2}$		-5		0		$\sqrt{2}$

3° Même question qu'au 2° pour l'équation : $2x - 5y = 0$.

x	1		-3		0,75	0
y		2		$-0,5$		

Quelle est, dans chaque cas, la valeur du rapport $\frac{x}{y}$? (Attention au dernier cas.)

148. Résolution d'une équation du premier degré à deux inconnues.

Soit l'équation :

$$4x - 3y = 8. \qquad (1)$$

Proposons-nous de trouver s'il existe des couples de valeurs $x = x_0$, $y = y_0$ qui donnent au premier membre la valeur numérique $4x_0 - 3y_0$ égale à 8.

Si nous remplaçons x par 1, le polynome $4x - 3y$ devient $4 - 3y$ et l'on devra avoir :

$$4 - 3y = 8,$$

ou : $3y = 4 - 8$; soit : $y = \frac{-4}{3}$.

Nous obtenons la solution $x = 1$; $y = -\frac{4}{3}$.

On aurait pu donner à x d'autres valeurs. Le tableau ci-dessous donne quelques exemples :

x	0	2	-1	8
y	$-\frac{8}{3}$	0	-4	8

Les raisonnements présentés sur l'exemple sont applicables au cas général de l'équation :

$$ax + by + c = 0,$$

où a, b, c sont des coefficients et x et y les inconnues. *Nous supposons essentiellement que ni a ni b ne sont nuls.*

Si $b = 0$, $a \neq 0$, l'équation (1) est une équation à une inconnue x.
Si $a = 0$, $b \neq 0$, l'équation (1) est une équation à une inconnue y.
Si $a = b = 0$, il n'y a plus d'équation.

▪ THÉORÈME. — ***1° On obtient toutes les solutions de l'équation :***

$$\mathbf{ax + by + c = 0 \qquad (ab \neq 0)}$$

en donnant à x une valeur arbitraire et en calculant la valeur correspondante de y par la formule :

$$\mathbf{y = -\frac{ax + c}{b}}.$$

2° L'équation ax + by + c = 0 admet une infinité de solutions.

EXEMPLE. *Résoudre l'équation :*

$$x - 5y = 4.$$

Il serait maladroit, dans ce cas, de donner à x une valeur arbitraire et d'en déduire la valeur associée de y par la formule $y = \frac{x-4}{5}$, car il est plus simple d'inverser le rôle des inconnues pour ne pas introduire de dénominateur.

Nous donnerons donc à y une valeur arbitraire et nous en déduirons la valeur associée de x par la formule :

$$\boxed{x = 5y + 4}$$

On obtient une infinité de solutions. En voici quelques-unes :

y	-4	-2	-1	0	1	10
x	-16	-6	-1	4	9	54

149. Équation homogène du premier degré à deux inconnues.

☆ ***On dit qu'une équation du premier degré à deux inconnues est homogène lorsque, après réduction, elle est de la forme :***

$$\mathbf{ax + by = 0}$$

où* a *et* b *sont des coefficients,* x *et* y *sont les inconnues.

EXEMPLES. Les équations : $3x + 4y = 0$, $x - 2y = 0$, sont des équations homogènes.

L'équation : $x + 2y = -1$ n'est pas homogène.

On suppose naturellement que ni a ni b ne sont nuls, comme dans le cas général.

On peut résoudre une telle équation :

$$ax + by = 0$$

en employant le théorème énoncé au n° 148 à propos de l'équation générale.

C'est ainsi que pour résoudre l'équation :

$$2x - 5y = 0,$$

on pourra écrire :

$$y = \frac{2x}{5},$$

et donner à x toute valeur arbitraire.

Mais il est plus élégant d'opérer d'une autre façon.
L'égalité conditionnelle : $2x - 5y = 0$

est logiquement équivalente à l'égalité :

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2}.$$

Si l'on désigne par k la valeur commune de ces rapports, on aura :

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k,$$

d'où l'on déduit : $x = 5k$ et $y = 2k$.

La méthode est générale. L'équation :

$$ax + by = 0$$

peut s'écrire :

$$\frac{x}{-b} = \frac{y}{a}$$

et, en appelant toujours k la valeur commune de ces rapports, l'on aura :

$$x = -bk, \qquad y = ak.$$

Nous énoncerons :

▪ THÉORÈME. — ***L'équation* $\mathbf{ax + by = 0}$ *(où* a *et* b *ne sont nuls ni l'un ni l'autre) admet une infinité de solutions qui sont données par les formules :***

$$\mathbf{x = -bk, \qquad y = ak,}$$

où* k *désigne un nombre arbitraire.

• REMARQUE. Si $a = 0$, $b \neq 0$, l'équation devient : $by = 0$; d'où $y = 0$ et x reste arbitraire.

Si $a \neq 0$, $b = 0$, l'équation devient $ax = 0$; d'où $x = 0$ et y reste arbitraire.

EXEMPLES. I. Les solutions de l'équation $3x + 2y = 0$ sont données par : $x = -2k$, $y = 3k$ où k est arbitraire. Voici quelques valeurs :

k	0	1	-1	4	-5	1,5
x	0	-2	2	-8	10	-3
y	0	3	-3	12	-15	4,5

II. Les solutions de l'équation $x - 2y = 0$ sont données par : $x = 2k$, $y = k$. Mais, ici, il est inutile d'introduire le nombre k. Il est aussi simple de dire que l'on a :

$$x = 2y,$$

y restant arbitraire.

150. Interprétation géométrique. — Reprenons l'équation :

$$4x - 3y = 8. \qquad (1)$$

On ne modifie pas les solutions de cette équation en divisant les deux membres par 3 ; on obtient :

$$\frac{4x}{3} - y = \frac{8}{3},$$

c'est-à-dire :

$$y = \frac{4x}{3} - \frac{8}{3}. \qquad (2)$$

Cela montre que y est une fonction de x, du premier degré. Le graphique de cette fonction, est une droite (D) que nous avons appris à construire. Sur la *figure* 97 nous avons utilisé les points :

A $(x = 2; \quad y = 0)$,
B $(x = -1; \quad y = -4)$.

On sait que tout point M de (D) a des coordonnées x et y qui satisfont à (2) donc à (1) et que tout point dont les coordonnées sont liées par la relation :

$$y = \frac{4x}{3} - \frac{8}{3},$$

donc aussi par $4x - 3y = 8$, se trouve sur (D). Nous avons ainsi obtenu une interprétation géométrique de l'infinité de solutions de l'équation (1) : *ces solutions sont les coordonnées de tout point de* (D).

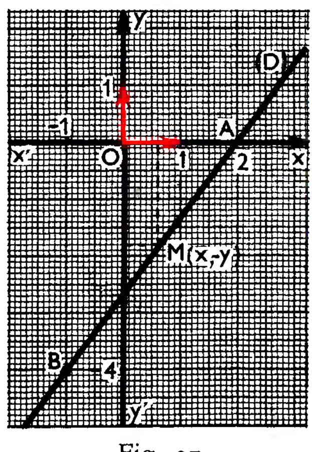


Fig. 97.

• **Applications.**

643. — *A l'aide d'un tableau, dans lequel les valeurs correspondantes de* x *et* y *seront écrites l'une sous l'autre, donner 5 solutions de chacune des équations suivantes :*

1° $2x - 5y = 6$.
2° $3x + 4y = 9$.
3° $5x - y + 3 = 0$.
4° $x + 2y - 5 = 0$.

644. — *On donne l'équation :*

$$4x - 5y = 2.$$

Trouver la formule qui permet de calculer la valeur de y *lorsque l'on connaît la valeur de* x*. Utiliser la formule pour calculer les valeurs de* y *qui correspondent à :*

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = -1, \quad x = -2.$$

645. — *Parmi les équations suivantes indiquer celles qui sont homogènes :*

$$3x + 2y - 1 = 0, \quad 4x - 5y = 0,$$
$$2x = 3y, \quad 3x = 5y - 1,$$
$$5x + 2 = 2 - 3y, \quad \frac{1}{3}y = \frac{4}{9}x,$$
$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} + 1, \quad x + 2y = 0.$$

646. — *Mettre chacune des proportions suivantes sous la forme d'une équation homogène :*

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3}; \quad \frac{5}{x} = \frac{-4}{y};$$
$$\frac{y}{x} = 1{,}5; \quad \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 0;$$
$$\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 0; \quad x - \frac{y}{3} = 0.$$

647. — 1° *Construire le graphique de la fonction :*

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

2° *Utiliser le graphique du* 1° *pour trouver* 5 *solutions de l'équation :*

$$x - 2y = 3.$$

648. — *On donne l'équation :*

$$3x + 5y = 8.$$

Mettre cette équation sous la forme $y = ax + b$ *et tracer le graphique de la fonction trouvée. Quel est le coefficient de direction de la droite trouvée ? Quelle est son ordonnée à l'origine ?*

II. SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES

Travaux pratiques d'initiation.

1° Vous savez que l'équation :

$$3x - 2y = 5 \qquad (1)$$

a une infinité de solutions.
Il en est de même de l'équation :

$$6x - 4y = 10. \qquad (2)$$

Pensez-vous que toute solution de (1) soit aussi solution de (2)? Pourquoi?

2° On écrit l'équation :

$$3x - 2y = 4. \qquad (3)$$

Une solution de (1) est-elle solution de (3)? Pourquoi?
Dans l'équation (1), on suppose $x = 1$. Calculer y. Remplacer x et y par les nombres trouvés dans l'équation :

$$7x + 11y = -4. \qquad (4)$$

Que constate-t-on?

3° Dans (1), on suppose maintenant $x = -1$. Calculer y. Remplacer x et y par les nombres trouvés dans l'équation (4). Que constate-t-on?

151. Système de deux équations à deux inconnues. — On peut se demander s'il existe un nombre x et un nombre y qui vérifient à la fois deux équations du premier degré à deux inconnues. Soit, par exemple les équations :

$$\text{I} \begin{cases} x + 3y = 11, & (1) \\ 2x - y = 8. & (2) \end{cases}$$

L'ensemble des deux équations constitue ce que l'on appelle un système de deux équations.

Les nombres : $x = 2$ et $y = 3$ vérifient l'équation (1), mais ne vérifient pas l'équation (2).

Les nombres : $x = 4$ et $y = 0$ vérifient l'équation (2), mais ne vérifient pas l'équation (1).

Nous savons d'ailleurs que chacune des équations (1) et (2) admet une infinité de solutions. Nous nous proposons de savoir si, parmi ces deux infinités de solutions, il y a un couple commun constitué par des valeurs de x et de y qui vérifient à la fois les équations (1) et (2) et qu'on appellera solution du système. On constate qu'il en est bien ainsi pour $x = 5$ et $y = 2$. On dit que ce couple est *une solution* du système.

☆ **Résoudre un système *de deux équations à deux inconnues c'est :***
1° chercher si ce système admet des solutions;
2° calculer toutes ces solutions.

Nous étudierons ce problème uniquement sur des exemples. Au préalable, nous mettrons les équations à résoudre sous la forme indiquée dans le système I. Cela est toujours possible, en utilisant les propriétés démontrées : réduction, transposition de termes, suppression des dénominateurs.

EXEMPLE. *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} - 3\dfrac{y+2}{4} + 1 = \dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{2} + 5, \\ x^2 + 2y^2 + 3xy + 3(x-2) = (x+y)(x+2y) + 4y - 1. \end{cases}$$

La première équation s'écrit, en multipliant les deux membres par 12 :

$$4(x-1) - 9(y+2) + 12 = 2x - 6y + 60.$$

En effectuant les calculs indiqués et après transformations, on obtient :

$$2x - 3y = 70.$$

La deuxième équation s'écrit, en développant les calculs :

$$x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x - 6 = x^2 + xy + 2xy + 2y^2 + 4y - 1,$$

ou, après transformations :

$$3x - 4y = 5.$$

Il revient donc au même de résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 70, \\ 3x - 4y = 5. \end{cases}$$

152. Résolution par la méthode de substitution. — Soit le système :

$$\text{II} \begin{cases} 2x + 3y = 7, & (3) \\ 3x + 5y = 10. & (4) \end{cases}$$

Cherchons s'il existe des valeurs des inconnues x et y qui vérifient à la fois les équations (3) et (4).

1° *Faisons l'hypothèse que ce système admet au moins une solution :*

$$x = x_0; \qquad y = y_0.$$

Nous aurons alors les égalités numériques :

$$\begin{cases} 2\,x_0 + 3\,y_0 = 7, & (5) \\ 3\,x_0 + 5\,y_0 = 10. & (6) \end{cases}$$

De l'égalité (5) on déduit :

$$2\,x_0 = 7 - 3\,y_0$$

ou encore :

$$x_0 = \frac{7 - 3\,y_0}{2}. \qquad (7)$$

Écrivons que x_0, mis sous cette forme, satisfait à l'égalité (6), nous obtenons l'égalité :

$$3\,\frac{7 - 3\,y_0}{2} + 5\,y_0 = 10,$$

ou, en multipliant les deux membres par 2 :

$$3\,(7 - 3\,y_0) + 10\,y_0 = 20$$

et, en effectuant les calculs indiqués :

$$21 - 9\,y_0 + 10\,y_0 = 20, \quad \text{d'où :} \quad y_0 = -1. \qquad (8)$$

L'égalité (7) donne alors :

$$x_0 = \frac{7 + 3}{2}, \qquad \text{ou :} \qquad x_0 = 5. \qquad (9)$$

2° *Les nombres* x = 5 *et* y = — 1 *sont-ils solutions du système* II ? Il suffit de vérifier. La valeur numérique du polynome $2\,x + 3\,y$ est alors :

$$2 \times 5 + 3\,(-1) = 7.$$

Celle du polynome $3\,x + 5\,y$ est alors :

$$3 \times 5 + 5\,(-1) = 10.$$

Ainsi, nous avons établi que :

1° si le système donné a une solution, celle-ci ne peut être que $x = 5$ et $y = -1$;

2° effectivement, ces nombres sont solutions.

Nous en concluons que le système II admet la seule solution formée par le couple :

$$\boxed{x = 5; \qquad y = -1.}$$

Cette manière de procéder nous conduit à l'énoncé suivant :

- ***Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues* x *et* y :**

  1° On résout l'une des équations par rapport à l'une des inconnues,* x *par exemple, en considérant* y *comme connu.

  2° On porte la valeur ainsi trouvée pour* x *dans la seconde équation, qui devient alors une équation à une seule inconnue,* y. *On obtient la valeur de* y *en résolvant cette équation.

  3° Par retour en arrière,* y *étant maintenant connu,* x *est donné par la formule qui résulte du 1°.

Cette façon d'opérer porte le nom de *méthode de substitution* car, après avoir calculé x en fonction de y à l'aide de l'une des équations, on *substitue* à l'inconnue x, dans l'autre équation, l'expression ainsi trouvée.

En pratique, on ne recommence pas le raisonnement fait dans la démonstration et on se dispense d'écrire x_0 et y_0. On conserve les lettres x et y.

Exemple. *Résoudre le système :*

$$\text{III} \begin{cases} 5x - 3y = 99, & (1) \\ 9x + 5y = 95. & (2) \end{cases}$$

On calcule x dans l'équation (1) et l'on obtient : $x = \dfrac{3y + 99}{5}$. (3)

En substituant à x cette expression dans l'équation (2), on trouve :

$$9\frac{3y + 99}{5} + 5y = 95, \quad (4)$$

qui, après transformation, s'écrit :

$$27y + 891 + 25y = 475,$$

ou :

$$52y = -416,$$

et :

$$y = -8.$$

L'égalité (3) fournit alors :

$$x = \frac{-24 + 99}{5} = 15.$$

On constate facilement que ces valeurs $x = 15$ et $y = -8$ vérifient les équations 1) et (2) et l'on conclut que le système III admet pour solution :

$$\boxed{x = 15; \quad y = -8.}$$

• CONSEIL. On utilisera la méthode de substitution en calculant dans *l'une quelconque* des équations l'expression de l'*une quelconque* des inconnues en fonction de l'autre. On fera ce double choix de façon à simplifier au maximum les calculs. C'est ainsi que pour résoudre le système :

$$\begin{cases} 108\,x - 21\,y = -3, \\ 42\,x - y = 6. \end{cases}$$

il serait maladroit de calculer x dans l'une ou l'autre de ces équations car cela introduirait comme dénominateur 108 ou 42. Pour une raison analogue, on ne calculera pas non plus y dans la première équation (dénominateur 21). Au contraire, il est simple de calculer y dans la deuxième équation :

$$y = 42\,x - 6.$$

En portant dans la première on trouve :

$$108\,x - 21\,(42\,x - 6) = -3$$

ou :

$$-774\,x = -129.$$

Par suite : $x = \frac{1}{6}$ et $y = 42\,x - 6 = 7 - 6 = 1.$

153. Cas d'une équation incomplète. — Si l'une des équations est incomplète et ne contient qu'une inconnue, le procédé se simplifie.

EXEMPLE. *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 2\,x - 5 = 0 \\ 3\,x + 4\,y = 15{,}5. \end{cases}$$

La première équation admet la solution unique $x = \frac{5}{2}$. En portant cette valeur dans la deuxième équation, on obtient :

$$7{,}5 + 4\,y = 15{,}5;$$

d'où : $4\,y = 8$ et $y = 2.$

Le système proposé admet pour solution :

$$\boxed{x = \frac{5}{2}; \qquad y = 2.}$$

154. Résolution par la méthode de combinaison. — Soit le système :

$$\text{I} \begin{cases} 3\,x - 7\,y = 27, & (1) \\ 2\,x + 5\,y = -11. & (2) \end{cases}$$

Cherchons s'il existe des valeurs des inconnues x et y qui vérifient les équations (1) et (2).

1° *Faisons l'hypothèse que le système proposé admet au moins une solution :*

$$x = x_0; \qquad y = y_0.$$

Nous aurons les égalités numériques :

$$3\,x_0 - \boxed{7}\,y_0 = 27, \qquad (3)$$
$$2\,x_0 + \boxed{5}\,y_0 = -11. \qquad (4)$$

— Multiplions les deux membres de l'égalité (3) par 5, coefficient de y_0 dans (4), nous obtenons :

$$5\,(3\,x_0 - 7\,y_0) = 27 \times 5 \quad \text{ou :} \quad 15\,x_0 - 35\,y_0 = 135. \qquad (5)$$

— Multiplions les deux membres de l'égalité (4) par (— 7), coefficient de y_0 dans (3), nous obtenons :

$$-7\,(2\,x_0 + 5\,y_0) = -11 \times 7 \quad \text{ou :} \quad -14\,x_0 - 35\,y_0 = 77. \qquad (6)$$

— Retranchons membre à membre les égalités (5) et (6), nous obtenons :

$$15\,x_0 - 35\,y_0 - (-14\,x_0 - 35\,y_0) = 135 - 77 \quad \text{ou :} \quad 29\,x_0 = 58;$$
$$\text{d'où :} \quad x_0 = 2.$$

Opérons de la même façon, en permutant les rôles de x_0 et y_0.

— Multiplication des deux membres de (3) par 2, coefficient de x_0 dans (4)

$$2\,(3\,x_0 - 7\,y_0) = 27 \times 2 \quad \text{ou :} \quad 6\,x_0 - 14\,y_0 = 54. \qquad (7)$$

— Multiplication des deux membres de (4) par 3, coefficient de x_0 dans (3) :

$$3\,(2\,x_0 + 5\,y_0) = -11 \times 3 \quad \text{ou :} \quad 6\,x_0 + 15\,y_0 = -33. \qquad (8)$$

— Soustraction membre à membre de (7) et de (8) :

$$6\,x_0 - 14\,y_0 - (6\,x_0 + 15\,y_0) = 54 + 33$$
$$\text{ou :} \quad -29\,y_0 = 87,$$
$$\text{d'où :} \quad y_0 = -3$$

2° *Les nombres* x = 2 *et* y = — 3 *sont solutions du système proposé.* Il suffit de vérifier.

La valeur numérique du polynome $3\,x - 7\,y$ est $3 \times 2 - 7\,(-3) = 27$.

La valeur numérique du polynome $2\,x + 5\,y$ est $2 \times 2 + 5\,(-3) = -11$.

Ainsi, nous avons établi que :

1° si le système donné a une solution, ce ne peut être que $x = 2$ et $y = -3$;

2° effectivement, ces nombres sont solutions.

Le système proposé admet la seule solution formée par le couple :

$$\boxed{x = 2; \qquad y = -3.}$$

Cette manière de procéder nous conduit à l'énoncé suivant :

▪ ***Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y :***
1° On multiplie les deux membres de chaque équation par le coefficient d'une inconnue (y, par exemple) pris dans l'autre équation.
2° On retranche membre à membre les deux équations obtenues. On obtient une équation à une inconnue (x) que l'on résout.
3° On opère de la même façon pour l'autre inconnue.

Cette façon d'opérer porte le nom de *méthode par combinaison*, car, en somme, on combine les premiers membres par multiplication et soustraction.

On retiendra essentiellement que la *méthode par combinaison consiste à rendre égaux les coefficients d'une même inconnue dans les deux équations en multipliant les deux membres de ces équations par des nombres convenables.*

En pratique, on ne recommence pas le raisonnement fait dans la démonstration et on se dispense d'écrire x_0 et y_0. On conserve les lettres x et y.

• REMARQUES. I. — Ayant appliqué la méthode par combinaison pour calculer x, par exemple, on n'est pas obligé d'employer la même méthode pour calculer y. x connu, on peut utiliser l'une ou l'autre des équations pour calculer y.

EXEMPLE. *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 4x - 9y = 17, & (1) \\ 3x + 5y = 48. & (2) \end{cases}$$

— En multipliant les deux membres de (1) par 5, coefficient de y dans (2), on obtient

$$5(4x - 9y) = 85 \qquad \text{ou :} \qquad 20x - 45y = 85. \qquad (3)$$

— En multipliant les deux membres de (2) par -9, coefficient de y dans (1), on obtient

$$-9(3x + 5y) = -432 \qquad \text{ou :} \qquad -27x - 45y = -432. \qquad (4)$$

— En soustrayant, membre à membre, les équations (3) et (4), on obtient :

$$20x - 45y - (-27x - 45y) = 85 + 432 \qquad \text{ou :} \qquad 47x = 517, \qquad (5)$$

$$x = 11.$$

— En tenant compte de $x = 11$, l'équation (1) devient : $44 - 9y = 17$;

d'où : $9y = 44 - 17 = 27$; et : $y = 3$

— La vérification est facile.

Le système proposé a pour solution : $\boxed{x = 11;\ y = 3.}$

II. — Pratiquement, on profitera des circonstances qui abrégeront les calculs et on choisira la méthode qui donne le calcul le plus simple. On notera aussi qu'au lieu de rendre égaux les coefficients d'une inconnue dans les deux équations, on peut les rendre opposés et ajouter membre à membre ensuite (au lieu de retrancher).

EXEMPLE. *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 5x + 12y = -1, \\ 13x - 2y = 14. \end{cases}$$

Nous rendrons les coefficients de y opposés en multipliant les deux membres de la deuxième équation par 6 et nous obtenons le système :

$$\begin{cases} 5x + 12y = -1, \\ 78x - 12y = 84. \end{cases}$$

Par addition membre à membre, nous trouvons :

$$83x = 83;$$

d'où : $$x = 1.$$

La première équation donne alors :

$$5 + 12y = -1, \qquad 12y = -6;$$

d'où : $$y = -\frac{1}{2} = -0{,}5.$$

La vérification est immédiate.

Le système admet pour solution : $\boxed{x = 1; \; y = -0{,}5.}$

III. — Pour rendre égaux (ou opposés) les coefficients d'une certaine inconnue, il n'est pas toujours nécessaire de multiplier les premiers membres par les coefficients de l'autre inconnue. L'utilisation du P. P. M. C. des coefficients peut rendre des services.

EXEMPLE. *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 15x + 6y = -1{,}5 \\ 45x + 16y = -5. \end{cases}$$

Le P. P. M. C. de 6 et de 16 est 48. Nous multiplions donc les deux membres de la première équation par 8 et ceux de la deuxième par -3 et nous obtenons le système :

$$\begin{cases} 120x + 48y = -12, \\ -135x - 48y = +15. \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre, nous trouvons :

$$-15x = 3;$$

d'où : $$x = -\frac{1}{5} = -0{,}2.$$

La première équation s'écrit alors :

$$-3+6y=-1{,}5; \qquad 6y=1{,}5$$

d'où :

$$y=\frac{1{,}5}{6}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

La vérification est immédiate.

Le système proposé admet pour solution :

$$\boxed{x=-0{,}2;\ y=0{,}25.}$$

155. Systèmes impossibles. — Il peut arriver que le système proposé n'ait pas de solution.

EXEMPLES. I. *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 3x-6y=5 \\ 8x-16y=7. \end{cases}$$

De la première équation, nous déduisons :

$$3x=6y+5, \qquad \text{ou :} \qquad x=\frac{6y+5}{3}.$$

Portons cette expression de x dans la deuxième équation, qui s'écrit alors :

$$8\frac{6y+5}{3}-16y=7,$$

$8(6y+5)-48y=21$ (en multipliant les deux membres par 3),

$48y+40-48y=21$ (en effectuant les calculs indiqués),

(1) $40=21$ (en réduisant les termes).

Nous aboutissons à une relation fausse.

Le raisonnement fait au n° 154 se résume ainsi :

Si le système proposé admettait au moins une solution $x=x_0$ et $y=y_0$, on en déduirait la relation (1). Or celle-ci n'a pas de sens. Nous en concluons que le système n'a pas de solution. On dit que le système proposé *est impossible.*

II. *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 12x-18y=13, \\ 10x-15y=21. \end{cases}$$

Utilisons la méthode par combinaison en remarquant que le P. P. M. C. de 12 et de 10 est 60.

Nous multiplions donc les deux membres de la première équation par 5, ceux de la deuxième par 6 et nous obtenons le système :

$$\begin{cases} 60x-90y=65, \\ 60x-90y=126. \end{cases}$$

Or le polynome $60x-90y$ ne peut pas avoir deux valeurs différentes lorsqu'on donne à x et à y des valeurs déterminées $x=x_0$ et $y=y_0$.

Le système proposé *est impossible.*

156. Systèmes indéterminés. — Il peut se présenter des exemples de systèmes qui admettent une infinité de solutions.

EXEMPLE. *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 2x - 4y = 7, \\ 3x - 6y = 10{,}5. \end{cases}$$

De la première équation, nous déduisons :

$$2x = 4y + 7; \qquad x = \frac{4y+7}{2} = 2y + 3{,}5.$$

Portons cette expression de x dans la deuxième équation qui s'écrit alors :

$$3(2y + 3{,}5) - 6y = 10{,}5,$$

et, en développant les calculs :

$$6y + 10{,}5 - 6y = 10{,}5,$$

ce qui est une identité.

Au reste, en multipliant les deux membres de la première équation par 1,5, elle devient :

$$(2 \times 1{,}5)x - (4 \times 1{,}5)y = (7 \times 1{,}5),$$

ou :

$$3x - 6y = 10{,}5.$$

Les solutions de la première équation sont donc aussi solutions de la deuxième et inversement.

Le système proposé admet donc une infinité de solutions qui sont toutes les solutions de l'équation :

$$2x - 4y = 7.$$

Nous avons appris à les trouver; on donne à y une valeur arbitraire et on en déduit la valeur associée de x par la formule :

$$x = \frac{4y+7}{2} \qquad \text{ou} \qquad x = 2y + 3{,}5.$$

On dit que le système est *indéterminé.*

Si l'on avait utilisé la méthode par combinaison, on aurait pu être conduit à multiplier les deux membres de la première équation par 3 et ceux de la deuxième équation par 2 (pour égaler les coefficients de x) et l'on aurait trouvé :

$$\begin{cases} 6x - 12y = 21, \\ 6x - 12y = 21. \end{cases}$$

On aurait ainsi retrouvé l'indétermination.

• REMARQUE. On démontrera plus tard (Classe de 2e) que, pour la résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, il ne peut se présenter que trois cas :

ou bien le système admet une solution $x = x_0$, $y = y_0$,

ou bien le système n'admet aucune solution (système impossible),

ou bien le système admet une infinité de solutions (système indéterminé).

157. Solutions inacceptables. — *Soit à résoudre le système :*

$$\text{I}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{y}{y+1}=2,\\ 2x+\quad 3y=-1.\end{array}\right.$$

L'écriture de la première équation suppose $x \neq 1$ et $y \neq -1$.

En multipliant par $(x-1)(y+1)$, la première équation s'écrit :

$$x(y+1)+y(x-1)=2(x-1)(y+1),$$

ou :

$$xy+x+xy-y=2xy+2x-2y-2,$$

soit :

$$x-y=2,$$

et l'on obtient le système :

$$\text{II}\left\{\begin{array}{l}x-y=2,\\ 2x+3y=-1,\end{array}\right.$$

ou encore :

$$\left\{\begin{array}{l}3x-3y=6;\\ 2x+3y=-1.\end{array}\right.$$

En additionnant membre à membre l'on trouve :

$$5x=5;$$

et l'on en déduit : $x=1; \quad y=-1.$

Ces solutions sont solutions du système II. Mais elles ne conviennent pas au système I. Le système I n'a pas de solution.

158. Interprétation géométrique. — Soit le système :

$$\text{I}\left\{\begin{array}{ll}x+3y=11, & (1)\\ 2x-y=8. & (2)\end{array}\right.$$

Nous savons que nous ne modifions pas les solutions de chaque équation ni par conséquent, les solutions du système, si elles existent, en écrivant celui-ci sous la forme :

$$\text{II}\left\{\begin{array}{ll}y=\dfrac{11-x}{3}, & (3)\\ y=2x-8. & (4)\end{array}\right.$$

Traçons alors deux axes de coordonnées rectangulaires sur lesquels nous choisissons des unités de longueur (*fig. 98*).

Le graphique de la fonction $y=\dfrac{11-x}{3}$ est une droite (D) que nous construisons à l'aide des points :

$$\text{A}\,(x=11;\ y=0); \qquad \text{B}\,(x=2;\, y=3).$$

Le graphique de la fonction $y = 2x - 8$ est une droite (D′) que nous construisons à l'aide des points :

$$C\ (x = 4;\ y = 0); \qquad E\ (x = 0;\ y = -8).$$

Le dessin montre que les droites (D) et (D′) se coupent en un point M_0. Les coordonnées x_0 et y_0 de M_0 satisfont à la fois à (3) et à (4), donc aussi à (1) et à (2); ces coordonnées constituent donc une solution du système.

Réciproquement, toute solution x_1 et y_1 du système I vérifie les égalités :

$$y_1 = \frac{11 - x_1}{3} \qquad \text{et} \qquad y_1 = 2x_1 - 8.$$

Par conséquent, le point de coordonnées x_1 et y_1 se trouve à la fois sur le graphique de la fonction :

$$y = \frac{11 - x}{3}$$

et sur le graphique de la fonction :

$$y = 2x - 8.$$

Comme ces deux graphiques n'ont en commun que le point M_0 (x_0, y_0), il en résulte que l'on a :

$$x_1 = x_0 \quad \text{et} \quad y_1 = y_0.$$

Sur la *figure 98*, on lit que les coordonnées de M_0 sont :

$$x_0 = 5; \qquad y_0 = 2.$$

On dit que l'on a résolu graphiquement le système I.

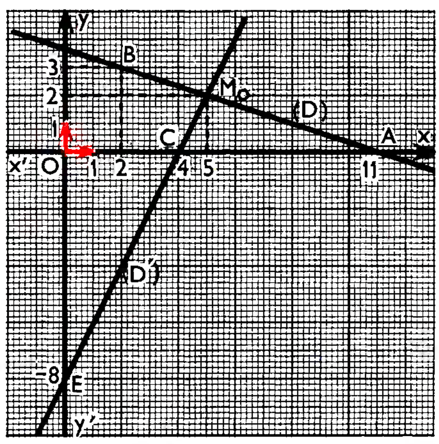


Fig. 98.

• Remarque. On obtiendra des valeurs approchées d'autant meilleures que le graphique aura été fait avec plus de soin. Mais il ne faut pas attendre de cette méthode une précision extrême.

Exemple. *Soit le système :*

$$\text{III} \begin{cases} 5x - 3y = 7, \\ 7x + 2y = 5. \end{cases}$$

Nous l'écrivons sous la forme :

$$\text{IV} \begin{cases} y = \dfrac{5x - 7}{3}, \\ y = \dfrac{5 - 7x}{2}. \end{cases}$$

Nous construisons les graphiques de ces deux fonctions (*fig.* 99) :

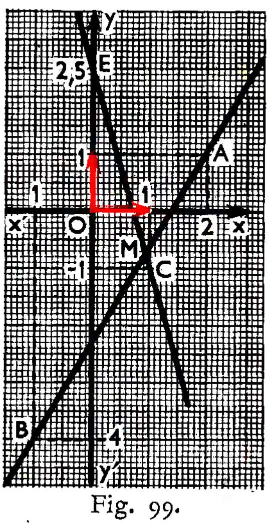


Fig. 99.

$y = \dfrac{5x - 7}{3}$; points A ($x = 2$; $y = 1$)

et B ($x = -1$; $y = -4$);

$y = \dfrac{5 - 7x}{2}$; points C ($x = 1$; $y = -1$)

et E ($x = 0$, $y = 2{,}5$).

Les droites AB et CE se coupent en un point dont les coordonnées sont voisines de $x_0 = 0{,}9$ et $y_0 = -0{,}8$.

En fait, on constatera que la solution du système III est $x = \dfrac{29}{31}$ et $y = \dfrac{-24}{31}$.

La méthode graphique ne donne donc qu'un résultat approximatif. Elle est cependant utile pour contrôler le calcul et s'assurer que les conclusions de ce calcul sont vraisemblables.

159. Cas particuliers. — 1° Nous avons vu au n° 155 que le système :

$$\begin{cases} 3x - 6y = 5, \\ 8x - 16y = 7; \end{cases}$$

était impossible.

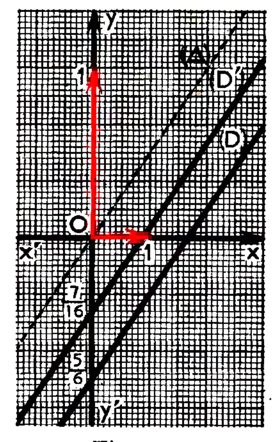


Fig. 100.

Examinons ce que donne la méthode graphique, appliquée à ce système. La première équation s'écrit :

$$y = \frac{3x - 5}{6}, \quad \text{ou :} \quad y = \frac{x}{2} - \frac{5}{6}.$$

La deuxième équation s'écrit :

$$y = \frac{8x - 7}{16} = \frac{x}{2} - \frac{7}{16}.$$

La droite (D), graphique de la fonction $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{6}$, a pour coefficient de direction $\dfrac{1}{2}$ et pour ordonnée à l'origine $-\dfrac{5}{6}$ (*fig. 100*).

La droite (D′), graphique de la fonction $y = \frac{x}{2} - \frac{7}{16}$, a pour coefficient de direction $\frac{1}{2}$ et pour ordonnée à l'origine $-\frac{7}{16}$. Ces droites (D) et (D′) sont donc parallèles (elles sont parallèles à la droite (Δ), graphique de la fonction $y = \frac{x}{2}$). Elles n'ont pas de point commun. On retrouve que le système proposé est *impossible*.

2° Nous avons vu au n° 156 que le système :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 7, \\ 3x - 6y = 10{,}5, \end{cases}$$

est indéterminé.

Examinons ce que donne la méthode graphique, appliquée à ce système.

La première équation s'écrit :

$$y = \frac{2x - 7}{4} = \frac{x}{2} - \frac{7}{4}.$$

La deuxième équation s'écrit :

$$y = \frac{3x - 10{,}5}{6} = \frac{x}{2} - \frac{7}{4}.$$

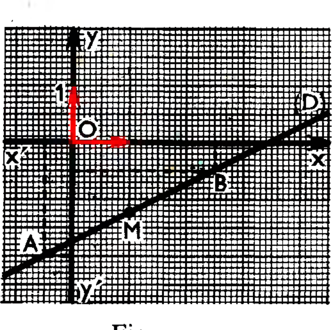


Fig. 101.

Les deux fonctions obtenues sont les mêmes. Elles ont le même graphique (D) construit à l'aide des deux points A ($x = -0{,}5$; $y = -2$) et B ($x = 2{,}5$; $y = -0{,}5$) (*fig. 101*). Les coordonnées x et y de tout point M de (D) vérifient le système proposé. On retrouve que ce système est indéterminé. Il y a une infinité de solutions.

Résumé

SYSTÈME	GRAPHIQUES
Une solution $x = x_0$, $y = y_0$	**Droites sécantes en** M (x_0, y_0)
Impossible	**Droites parallèles**
Indéterminé	**Droites confondues**

• **Applications.**

Résoudre, par la méthode de substitution, les systèmes suivants :

649. $\begin{cases} x - 12y + 1 = 0; \\ 5x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$ **650.** $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0; \\ 5x + 6y + 7 = 0. \end{cases}$ **651.** $\begin{cases} x + 4y = 14; \\ x + 11y = 35. \end{cases}$

652. $\begin{cases} 3x + 7y = 3; \\ 5x + 6y = -12. \end{cases}$ **653.** $\begin{cases} 12x - 18y = 30; \\ 10x - 15y = 25. \end{cases}$ **654.** $\begin{cases} 7x - 8y = 15; \\ 21x - 24y = 16. \end{cases}$

Résoudre, par la méthode de combinaison, les systèmes suivants :

655. $\begin{cases} x - 3y = 14; \\ x + 2y = 24. \end{cases}$ **656.** $\begin{cases} 5x - 2y = 39; \\ 3x + 2y = 33. \end{cases}$ **657.** $\begin{cases} 5x - 3y = 6; \\ 5x + 3y = 24. \end{cases}$

658. $\begin{cases} 2x + 5y = 29; \\ 3x - 4y = -14. \end{cases}$ **659.** $\begin{cases} 6x - 7y = 106; \\ 4x - 12y = 56. \end{cases}$ **660.** $\begin{cases} 6x - 5y = 10; \\ 8x + 3y = 52. \end{cases}$

661. $\begin{cases} 21x - 9y = 5; \\ 28x - 12y = 9. \end{cases}$ **662.** $\begin{cases} 15x + 6y = 7; \\ 40x + 16y = 23. \end{cases}$ **663.** $\begin{cases} 12x + 16y = 4; \\ 15x + 20y = 5. \end{cases}$

Résoudre les systèmes suivants :

664. $\begin{cases} 10x + 9y = 30; \\ 11x + 10y = -15. \end{cases}$ **665.** $\begin{cases} 14x - 35y + 28 = 0; \\ 10x - 25y + 20 = 0. \end{cases}$

666. $\begin{cases} 2x + 4y - 4 = 0; \\ 3x + 7y - 4 = 0. \end{cases}$ **667.** $\begin{cases} 72x + 21y - 9 = 0; \\ 48x - 14y - 2 = 0. \end{cases}$

668. $\begin{cases} 15x - 18y = 20; \\ 10x - 12y = -30. \end{cases}$ **669.** $\begin{cases} 28x + 35y + 3 = 0; \\ 12x + 15y + 25 = 0. \end{cases}$

670. $\begin{cases} 48x - 6y = 324; \\ 15x - 25y = 55. \end{cases}$ **671.** $\begin{cases} 3x - 5y = 11; \\ x + 2y = 11. \end{cases}$

672. $\begin{cases} 25x - 4y + 1 = 0; \\ 31x - 5y + 16 = 0. \end{cases}$ **673.** $\begin{cases} 15x - 10y - 1 = 0; \\ 75x - 25y - 5 = 0. \end{cases}$

674. $\begin{cases} 4x - 3y = 32; \\ 3y - x = 19. \end{cases}$ **675.** $\begin{cases} 4x - 9y = 17; \\ 3x + 5y = 48. \end{cases}$

Résoudre graphiquement les systèmes suivants et vérifier par le calcul les résultats obtenus :

676. $\begin{cases} y + x - 1 = 0; \\ y + 2x - 4 = 0. \end{cases}$ **677.** $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0; \\ 9x + 3y - 4 = 0. \end{cases}$ **678.** $\begin{cases} y = 2x - 7; \\ 2y = -x + 6. \end{cases}$

679. $\begin{cases} 2x + 4y - 10 = 0; \\ x - 2y + 3 = 0. \end{cases}$ **680.** $\begin{cases} 2x - 4y = 10; \\ 3x - 6y = 15. \end{cases}$ **681.** $\begin{cases} 2x + 3y - 13 = 0; \\ 5y - 4y + 2 = 0. \end{cases}$

682. $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0; \\ 2x - 5y - 3 = 0. \end{cases}$ **683.** $\begin{cases} 6y = 5x + 15; \\ y = -x + 8. \end{cases}$ **684.** $\begin{cases} 15x - 6y = 9; \\ 10x - 4y = 6. \end{cases}$

III. CALCULS PARTICULIERS

160. Calculer deux nombres connaissant leur somme s et leur différence d. — Si x et y sont les deux nombres cherchés, on doit avoir :

$$\text{I}\begin{cases} x + y = s, & (1) \\ x - y = d. & (2) \end{cases}$$

En ajoutant ces équations membre à membre, l'on obtient :

$$2x = s + d, \qquad \text{d'où :} \qquad x = \frac{s+d}{2}.$$

En retranchant ces équations membre à membre, l'on obtient :

$$2y = s - d, \qquad \text{d'où :} \qquad y = \frac{s-d}{2}.$$

Le problème admet donc toujours une solution si l'on n'impose aucune condition supplémentaire.

• Remarques. I — Bien entendu, si l'on désire que x et y soient entiers, par exemple, il faudra examiner si les réponses trouvées conviennent.

Exemple. Le système $\begin{cases} x + y = 9, \\ x - y = 4, \end{cases}$

admet pour solution : $x = \frac{13}{2}$ et $y = \frac{5}{2}$. Cette solution ne convient pas si x et y doivent être entiers. Le problème est alors impossible.

II. — Il peut arriver qu'une condition d'ordre géométrique doive être examinée.

Exemple. Le système $\begin{cases} x + y = 31, \\ x - y = 19, \end{cases}$

admet pour solution : $x = 25$ et $y = 6$.

Si l'on désire que x et y soient les mesures, en cm, des deux côtés d'un triangle dont le troisième côté aurait 29 cm, les réponses trouvées conviennent, car :

$$29 < 25 + 6.$$

Mais elles ne conviendraient pas si ce troisième côté avait 34 cm car :

$$34 > 25 + 6.$$

161. Équations homogènes. — Rappelons qu'une équation homogène du premier degré à deux inconnues est de la forme :

$$ax + by = 0.$$

Soit alors le système :

$$\text{I}\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ 4x + 5y = 0, \end{cases}$$

constitué par deux équations homogènes.

En multipliant les termes de la première équation par 2, le système devient :

$$\begin{cases} 4x - 6y = 0, \\ 4x + 5y = 0. \end{cases}$$

En retranchant membre à membre ces équations, on obtient :

$$-11y = 0,$$

d'où $y = 0$ et l'on déduit $x = 0$.

Le système I admet pour *unique solution* : $\boxed{x = 0, \quad y = 0.}$

162. Emploi d'inconnues auxiliaires. — 1° Soit à résoudre le système :

$$\text{I}\begin{cases} \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{3}{y+5} = 4, \\ \dfrac{5}{x-3} + \dfrac{1}{y+5} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Valeurs interdites : $x = 3$ et $y = -5$.

Posons : $\dfrac{1}{x-3} = \text{X}$ et $\dfrac{1}{y+5} = \text{Y}$. (1)

Le système devient :

$$\begin{cases} 2\text{X} - 3\text{Y} = 4, \\ 5\text{X} + \text{Y} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Un calcul facile montre que ce système a pour solution :

$$\text{X} = \frac{1}{2}; \qquad \text{Y} = -1.$$

Les *inconnues auxiliaires* X et Y étant ainsi calculées, on en déduit x et y par les relations (1) :

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad x - 3 = 2 \quad \text{et} \quad x = 5,$$

$$\frac{1}{y+5} = -1 \quad \text{d'où} \quad y + 5 = -1 \quad \text{et} \quad y = -6.$$

Ces valeurs $x = 5$; $y = -6$ n'annulent pas les dénominateurs des équations du système I. Elles conviennent donc.

Le système proposé admet pour solution : $\boxed{x = 5; \quad y = -6.}$

- **Applications.**

Trouver deux nombres connaissant leur somme s *et leur différence* d *avec les données suivantes :*

685. 1° $s = 7$; $d = 3$; 2° $s = -4$; $d = -3$; 3° $s = -\frac{1}{4}$; $d = \frac{1}{3}$.

686. 1° $s = \sqrt{3}$; $d = 1$; 2° $s = \sqrt{3} - 1$; $d = \sqrt{2} + 1$; 3° $s = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $d = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

687. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 4x + 7y = -3; \\ 7x + 4y = 36. \end{cases}$$

(¶ Ajouter et retrancher membre à membre.)

Résoudre les systèmes suivants, en utilisant les propriétés des rapports :

688. $\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{3}; \\ 5x + 4y = 8. \end{cases}$

689. $\begin{cases} \frac{x}{-1} = \frac{y}{5}; \\ 4x - 2y = 7. \end{cases}$

690. $\begin{cases} 3x = 2y; \\ 7x - 4y = 5. \end{cases}$

691. $\begin{cases} 7x - 4y = 0; \\ 5x + 3y = 41. \end{cases}$

692. $\begin{cases} \frac{y}{x} = 5; \\ x + 2y = 3. \end{cases}$

693. $\begin{cases} \frac{x}{y} = -2; \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

Résoudre les systèmes suivants, en utilisant des inconnues auxiliaires :

694. $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2; \\ \frac{8}{x} - \frac{9}{y} = 1. \end{cases}$ (¶ Poser : $\frac{1}{x} = u$ et $\frac{1}{y} = v$.)

695. $\begin{cases} \frac{1}{x-2} - \frac{3}{y-1} = -\frac{3}{4}; \\ \frac{3}{x-2} - \frac{5}{y-1} = -\frac{29}{12}. \end{cases}$

696. $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y-1} \quad 0,7; \\ \frac{4}{x} - \frac{2}{y-1} = \frac{1}{15}. \end{cases}$

697. $\begin{cases} \frac{3}{2x+1} + \frac{2}{y-1} = 16; \\ \frac{5}{2x+1} - \frac{3}{y-1} = -5. \end{cases}$

698. $\begin{cases} 2(x + y) - 3(x - y) = 4; \\ 5(x + y) - 7(x - y) = 2. \end{cases}$

EXERCICES ET PROBLÈMES

★

699. — Compléter le tableau suivant donnant des solutions de l'équation :

$$3x - 4y = 5$$

x	0		3		-1	2		
y		13		0			-12	-5

700. — On donne l'équation : $4x + 2y = 7$.

Trouver la formule qui donne y en fonction de x et celle qui donne x en fonction de y. Utiliser ces formules pour compléter le tableau suivant donnant des solutions de l'équation :

x	2		-1	$\frac{1}{4}$		$-0,75$		
y		4			$\frac{3}{2}$		$-1,5$	-10

Résoudre les systèmes suivants :

701. $\begin{cases} 24x - 15y = 18; \\ 16x - 10y = 12. \end{cases}$

702. $\begin{cases} 36x + 72y = 252; \\ 72x - 24y = 336. \end{cases}$

703. $\begin{cases} 6x - 8y = 15; \\ 9x - 12y = 10. \end{cases}$

704. $\begin{cases} 2x + 7y = 17; \\ 5x - 2y = 23. \end{cases}$

705. $\begin{cases} 121x + 132y = 1\,386; \\ 8,4x - 9,6y = 2,4. \end{cases}$

706. $\begin{cases} 21x + 12y = 141; \\ 14x - 9y = 43. \end{cases}$

707. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 7; \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 8. \end{cases}$

708. $\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 6; \\ \frac{2x}{3} + \frac{y}{6} = 12. \end{cases}$

709. $\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 5; \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 7. \end{cases}$

710. $\begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{9} + \frac{5}{3}; \\ \frac{x}{16} = \frac{y}{24} + \frac{5}{8}. \end{cases}$

711. $\begin{cases} \frac{7x}{8} + \frac{5y}{12} - \frac{7}{10} = 0; \\ \frac{7x}{6} + \frac{5y}{9} - \frac{14}{15} = 0. \end{cases}$

712. $\begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{9} + \frac{1}{9}; \\ \frac{x}{12} = \frac{y}{8} - \frac{1}{12}. \end{cases}$

713. $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4}; \\ 5x + 8y - 1 = 0. \end{cases}$

714. $\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{5y}{4} + \frac{11}{7} = 0; \\ \frac{4x}{5} + \frac{5y}{6} + \frac{22}{21} = 0. \end{cases}$

Résoudre les systèmes suivants en choisissant des inconnues auxiliaires :

715. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4; \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}=7. \end{cases}$

716. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=8; \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2. \end{cases}$

717. $\begin{cases} \dfrac{8}{x}-\dfrac{5}{y}=1; \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}+3=0. \end{cases}$

718. $\begin{cases} \dfrac{5}{3x}-\dfrac{2}{y}=-\dfrac{2}{3}; \\ \dfrac{7}{4x}+\dfrac{3}{2y}=1. \end{cases}$

719. $\begin{cases} \dfrac{4}{x-3}+\dfrac{5}{y+1}=2; \\ \dfrac{5}{x-3}+\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{29}{20}. \end{cases}$

720. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}+\dfrac{y-4}{2}=0; \\ 2(x-1)+3(y-4)=0. \end{cases}$

★ ★

Résoudre les systèmes suivants, après avoir réduit les termes semblables dans chaque équation :

721. $\begin{cases} 3x=\dfrac{4}{5}y+24; \\ x+\dfrac{2}{3}y=\dfrac{3}{4}x+13. \end{cases}$

722. $\begin{cases} x-3y=\dfrac{x}{2}; \\ 3x-y=2y+30. \end{cases}$

723. $\begin{cases} 5y=9+3x; \\ \dfrac{5x-4y}{8}=\dfrac{y-2}{4}+3. \end{cases}$

724. $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{6}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{3y-x}{4}=\dfrac{y}{6}-\dfrac{1}{12}. \end{cases}$

725. $\begin{cases} 3x+1=4y; \\ 3x-2y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{5}{12}. \end{cases}$

726. $\begin{cases} \dfrac{6x-y}{4}=4; \\ \dfrac{8x+2y}{5}=2x+\dfrac{8}{5}. \end{cases}$

727. $\begin{cases} 5x-y-(x-y-4)=4x+5y-21; \\ 6(x+y)-5(x-y-3)=4x-2y+71. \end{cases}$

728. $\begin{cases} 5(2x-y+1)=3(x-2y+3)+32; \\ 4(x+1)-2(y-1)=3(x+2y+1). \end{cases}$

729. $\begin{cases} 6(x-y)-6(x-y)=50; \\ 4(x+2y-1)-(x-3y+2)=164. \end{cases}$

730. $\begin{cases} \dfrac{3x-5y}{2}+3=\dfrac{2x+y}{5}+6; \\ 8-\dfrac{x-2y}{5}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{y-1}{2}. \end{cases}$

731. $\begin{cases} \dfrac{2x+3y}{4}-\dfrac{14x-15y}{11}=3; \\ \dfrac{2x}{5}-\dfrac{6y}{7}+1=0. \end{cases}$

Résoudre les systèmes suivants :

732. $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{y+9} = \dfrac{23}{14}; \\ \dfrac{5x+1}{2y-1} = \dfrac{41}{9}. \end{cases}$

733. $\begin{cases} \dfrac{4x-3}{y-2} = \dfrac{9}{2}; \\ \dfrac{5x-1}{2y+1} = \dfrac{14}{9}. \end{cases}$

734. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{y-1} = 10; \\ \dfrac{x-3}{y+1} = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

735. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{y-1} = 0; \\ 3x - 2y = 7. \end{cases}$

736. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-2} = 8; \\ \dfrac{x-3}{y+1} = 1. \end{cases}$

737. $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{x+y} = \dfrac{5}{3}; \\ \dfrac{2x-y}{y-x} + 3 = 0. \end{cases}$

738. $\begin{cases} xy + x + y = 0; \\ 2xy - 2x + 3y = 0. \end{cases}$

739. $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{4} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{2}; \\ (x-3)^2 - x^2 = 3 + y. \end{cases}$

740. — 1° Déterminer les coefficients m et n de l'équation : $mx + ny = 9$ de façon que cette équation soit vérifiée par les coordonnées de chacun des points :

$$A\,(x = 1,\ y = 1) \quad \text{et} \quad B\,(x = -1,\ y = 5).$$

2° m et n étant remplacés par les valeurs trouvées au 1°, mettre l'équation sous la forme $y = ax + b$ et tracer le graphique de la fonction trouvée. (¶ *Remarquer que l'on connaît deux points de ce graphique.*)

741. — Déterminer les coefficients m et n pour que le système d'équations

$$\begin{cases} (m-1)\,x + (n+1)\,y = m + n, \\ mx - ny = 4; \end{cases}$$

admette pour solution : $x = 2$ et $y = 5$.

742. — 1° Déterminer les coefficients a et b pour que l'équation :

$$ax^2 + bx - 5 = 0$$

admette pour solutions : $x = \dfrac{1}{3}$ et $x = -\dfrac{5}{2}$.

2° Même exercice pour l'équation : $2x^2 + ax + b = 0$, qui doit admettre pour solutions : $x = \dfrac{3}{2}$, $x = -5$.

3° Même exercice pour l'équation : $ax^2 - 17x + b = 0$, qui doit admettre pour solutions : $x = \dfrac{5}{4}$ et $x = -\dfrac{2}{5}$.

★ ★ ★

Résoudre les systèmes suivants :

743. $\begin{cases} \dfrac{x-2}{y-3}-\dfrac{x-3}{y-2}=\dfrac{4}{(y-3)(y-2)}; \\ (x-2)^2-(x-3)^2=(y+1)^2-(y-1)^2. \end{cases}$

744. $\begin{cases} (x-1)(y+2)-(x+1)(y-3)=4; \\ (x+3)(y+1)-(x-3)(y-5)=18. \end{cases}$

745. $\begin{cases} (x+1)(y+2)=(x-1)(y-3)+30; \\ (x+2)(y-3)=(x-3)(y+2)-10. \end{cases}$

746. $\begin{cases} (2x+1)y-(2y+1)x=x+y; \\ (x+5)(y-5)=4x+y+15. \end{cases}$

747. $\begin{cases} (x-1)(y+3)-(x-3)(y-11)=12; \\ \dfrac{2x+y}{5}-\dfrac{x-y}{3}=2x+\dfrac{11}{15}. \end{cases}$

748. $\begin{cases} (x-1)^2=(y-1)^2; \\ x+3y-5=0. \end{cases}$

749. $\begin{cases} (x-1)(y-2)=(x+1)(y-3); \\ (x-5)(y+4)=(x-4)(y-1). \end{cases}$

750. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+2}-\dfrac{x-1}{y-2}+\dfrac{12}{y^2-4}=0; \\ \dfrac{y-3}{x-1}-\dfrac{y+3}{x+1}+\dfrac{22}{x^2-1}=0. \end{cases}$

Résoudre les systèmes suivants en choisissant des inconnues auxiliaires :

751. I $\begin{cases} \dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{y}=7; \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=49. \end{cases}$ II $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-5}-\dfrac{5}{x-2y}=7; \\ \dfrac{2}{2x-5}+\dfrac{3}{x-2y}=49. \end{cases}$

752. I $\begin{cases} \dfrac{4}{x}-\dfrac{9}{y}=2; \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{y}=31. \end{cases}$ II $\begin{cases} 4\sqrt{x+3}-9\sqrt{y+1}=2; \\ 5\sqrt{x+3}+3\sqrt{y+1}=31. \end{cases}$

753. I $\begin{cases} 4x^2-3y^2=52; \\ 7x^2+5y^2=255. \end{cases}$ II $\begin{cases} x^2+5y^2=1; \\ 2x^2+11y^2=3. \end{cases}$

754. I $\begin{cases} 4\sqrt{x}-2\sqrt{y}=14; \\ 6\sqrt{x}-5\sqrt{y}=15. \end{cases}$ II $\begin{cases} 5\sqrt{x}+7\sqrt{y}=6; \\ 3\sqrt{x}-2\sqrt{y}=16. \end{cases}$

755. I $\begin{cases} 4|x|-2|y|=8; \\ 6|x|-5|y|=5. \end{cases}$ II $\begin{cases} 5|x|+3|y|=2; \\ 3|x|-2|y|=24. \end{cases}$

756. — 1° Déterminer les nombres a et b de façon que l'équation :

$$\frac{x^3 - 2x - 3}{x^2 - 1} = x + \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$$

soit vérifiée par les nombres $x = 0$ et $x = 2$.

2° Montrer que, pour les valeurs de a et b trouvées au 1°, l'équation devient une identité.

757. — Trouver tous les nombres entiers x et y, compris entre 0 et 20, qui vérifient l'une des équations suivantes :

1° $3x - 5y = 0;$

2° $3x - 5y = 4.$

758. — Soit le système : $\begin{cases} 5x + 2y = 18, & (1) \\ -2x + my = 4, & (2) \end{cases}$

m étant un nombre supposé connu.

1° Comment faut-il choisir m pour que la solution du système soit telle que :

$$y = 2x? \qquad (3)$$

2° m ayant la valeur trouvée au 1°, résoudre le système.

3° m ayant toujours la valeur trouvée au 1°, mettre les équations (1) et (2) sous la forme de fonctions de la forme $y = ax + b$. Tracer par rapport aux mêmes axes les fonctions ainsi trouvées ainsi que la fonction définie par la relation (3). Que remarque-t-on ?

759. — Soit la fonction :

$$y = ax + 1 - a, \qquad (1)$$

a étant un nombre supposé connu.

1° En supposant d'abord $a = 2$, puis $a = 1$, on obtient deux équations en x et y. Résoudre le système de ces équations. Montrer que la solution de ce système vérifie l'équation (1), quelle que soit la valeur de a.

2° Construire les graphiques des fonctions obtenues au 1°. Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

3° Lorsque a varie, le graphique de la fonction (1) est une droite qui se déplace dans le plan des axes de coordonnées. Comment se déplace-t-elle ?

760. — 1° Soit le système de deux équations à deux inconnues, x et y,

$$x + y = 0, \qquad y = mx + 1,$$

où m est un nombre donné.

A quel résultat conduit la résolution de ce système quand $m = -1$? Donner une explication graphique.

2° On donne le système de deux équations à deux inconnues, x et y,

$$x + y = 0, \qquad y = p(x - 1) - 1,$$

où p est un nombre donné.

Résoudre ce système pour une valeur quelconque de p. Quelle particularité présente le résultat ? A quel résultat est-on conduit quand $p = -1$?

3° Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse $+1$ appartenant à la droite représentant les variations de la fonction $y = p(x - 1) - 1$?

En utilisant la propriété, mise ainsi en évidence, donner une explication graphique des résultats du 2°. (B. E. P. C.)

CHAPITRE X

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ

I. PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

Travaux pratiques d'initiation:

1° Deux nombres ont pour somme 100. L'un est x. L'autre est .... Le triple du premier est le quintuple du second. On obtient ainsi l'équation :

$$3x = \dots$$

Achever le calcul des deux nombres.

2° Écrire une équation pour exprimer que, pour parcourir x km à la vitesse de 60 km/h et être revenu au point de départ par le même itinéraire à la vitesse de 90 km/h on a mis 4 heures. Calculer ensuite x et vérifier la réponse en utilisant l'énoncé du problème.

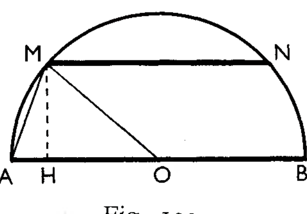


Fig. 102.

3° Pour construire géométriquement une corde MN, parallèle au diamètre AB d'un cercle de centre O, et dont la longueur est connue, il suffit de savoir placer le point M. On projette M en H sur AB (fig. 102). Quels sont les segments ou les angles de la figure qu'il suffit de connaître numériquement pour placer M? (Exemples : AM, $\widehat{AOM}$, etc.... Il y a plusieurs réponses.)

163. Méthode. — Nous avons déjà résolu, en classe de 4e, des problèmes simples conduisant à une équation du premier degré.

Nous avons procédé de la façon suivante :

1° **Choix de l'inconnue.** Ce choix est parfois imposé par l'énoncé, l'inconnue est alors un des nombres à déterminer dans le problème. On peut choisir aussi pour inconnue un nombre qui permet de calculer facilement, dès qu'il est connu, les autres nombres inconnus du problème. Dans tous les cas il faut *préciser* les *unités employées*.

2° **Mise en équation.** Il s'agit alors de traduire les indications de l'énoncé en utilisant l'inconnue choisie et les nombres connus. On effectue, pour cela, les opérations indiquées par l'énoncé, à savoir celles que l'on ferait si l'on voulait vérifier une solution trouvée. On se borne, bien entendu, à l'indication des opérations puisqu'il ne peut être question d'un calcul numérique tant que x n'est pas connu. On obtient ainsi une égalité conditionnelle qui est l'équation du problème.

3° **Résolution de l'équation.** C'est la partie mécanique du problème. Tout lien avec l'énoncé est rompu : on résout l'équation trouvée au 2°.

4° **Retour à la solution du problème.** On s'assure que la réponse (ou les réponses), calculée au 3°, satisfait bien aux conditions du problème.

164. Problème I. — *On donne les fractions* $\frac{6}{7}$ *et* $\frac{5}{9}$. *Déterminer un nombre relatif tel qu'en l'ajoutant au dénominateur de chacune de ces fractions, la différence des fractions obtenues soit égale à leur produit.*

1° **Choix de l'inconnue.** Soit x le nombre relatif cherché. Il n'y a pas d'autre condition restrictive à lui imposer que celle qui exprime que les nouveaux dénominateurs ne soient pas nuls. On doit donc avoir :

$$x + 7 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad x + 9 \neq 0.$$

2° **Mise en équation.** On doit avoir

soit : $$\frac{6}{7+x} - \frac{5}{9+x} = \frac{30}{(7+x)(9+x)}, \qquad (1)$$

soit : $$\frac{5}{9+x} - \frac{6}{7+x} = \frac{30}{(9+x)(7+x)}, \qquad (2)$$

suivant le sens dans lequel on calcule la différence des fractions.

3° **Résolution.** — Supprimons les dénominateurs de l'équation (1), en multipliant les deux membres par $(7 + x)(9 + x)$. Nous obtenons :

$$6(9 + x) - 5(7 + x) = 30,$$

d'où l'on déduit : $x = 11.$

L'équation (2) conduit, par un calcul analogue à :

$$5(7 + x) - 6(9 + x) = 30,$$

d'où l'on déduit : $x = -49.$

4° **Retour à la solution du problème.** Nous trouvons, pour $x = 11$:

$$\frac{6}{7 + 11} - \frac{5}{9 + 11} = \frac{6}{18} - \frac{5}{20} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4},$$

et, pour $x = -49$:

$$\frac{5}{-40} - \frac{6}{-42} = \left(-\frac{1}{8}\right) - \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{56} = \left(-\frac{1}{8}\right) \times \left(-\frac{1}{7}\right).$$

Le problème proposé a donc deux solutions :

$$\boxed{x = 11} \quad \text{et} \quad \boxed{x = -49.}$$

• Remarque. Si l'on avait posé le même problème à partir des fractions $\frac{6}{7}$ et $\frac{2}{9}$, on aurait eu l'équation :

$$\frac{6}{7 + x} - \frac{2}{9 + x} = \frac{12}{(7 + x)(9 + x)},$$

ou : $6(9 + x) - 2(7 + x) = 12,$

d'où : $x = -7.$

Cette solution n'est pas acceptable, car elle annule deux des dénominateurs. En écrivant la différence sous l'autre forme :

$$\frac{2}{9 + x} - \frac{6}{7 + x} = \frac{12}{(7 + x)(9 + x)}$$

on trouverait la solution : $\boxed{x = -13,}$ qui est acceptable.

165. Problème II. — *Deux localités* A *et* B, *sont distantes de* 100 *kilomètres. Un cycliste part à* 10 *heures de* A *pour aller à* B, *à la vitesse de* 20 *kilomètres à l'heure; une automobile part à* 11 *heures de* B, *à la vitesse de* 60 *kilomètres à l'heure pour aller à* A *et s'y arrêter. A quelle heure, et à quelle distance de* A *seront le cycliste et la voiture :* 1° *quand ils se croiseront;* 2° *quand ils seront à* 60 *kilomètres l'un de l'autre? (Les mouvements sont supposés uniformes.)*

1° **Choix de l'inconnue.** Soit t le nombre d'heures compté depuis 10 heures.

2° **Mise en équation.** Choisissons pour sens positif de parcours le sens de A vers B, pour point initial le point A et pour unité le kilomètre. A la date t, la position M du cycliste est donnée par son abscisse (*fig. 103*) :

$$\overline{AM} = 20\,t.$$

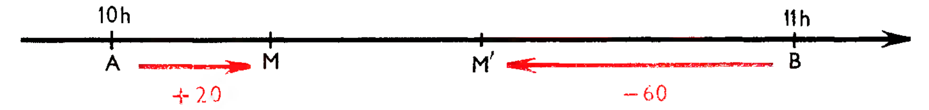


Fig. 103.

La position M′ de l'automobile, qui a marché pendant $(t - 1)$ heures et dont la vitesse est $-$ 60 km/h est donnée par :

$$\overline{BM'} = -60\,(t - 1)$$

et par suite :

$$\overline{AM'} = \overline{AB} + \overline{BM'} = 100 - 60\,(t - 1) = 160 - 60\,t.$$

a) Il y aura croisement si $\overline{AM} = \overline{AM'}$.

L'équation du problème, dans ce cas, est donc :

$$20\,t = 160 - 60\,t,$$

ou :

$$80\,t = 160. \qquad (1)$$

b) On aura $\overline{MM'} = 60$ si :

$$60 = \overline{AM'} - \overline{AM} = 160 - 60\,t - 20\,t.$$

L'équation du problème est alors :

$$80\,t = 100. \qquad (2)$$

c) On aura $\overline{MM'} = -60$ si

$$-60 = \overline{AM'} - \overline{AM} = 160 - 60\,t - 20\,t.$$

L'équation du problème est :

$$80\,t = 220. \qquad (3)$$

3° **Résolution de l'équation :**

Équation (1) : $t = 2$; il est 12 h.

Équation (2) : $t = \frac{5}{4}$; il est 11 h 15 mn.

Équation (3) : $t = \frac{11}{4}$; il est 12 h 45 mn.

4° **Retour à la solution du problème.**

a) L'heure du croisement est 12 heures; le cycliste a roulé pendant 2 heures; il est à 40 kilomètres de A.

b) A 11 h 15 mn, le cycliste est à 25 kilomètres de A et l'automobile à 15 kilomètres de B. La distance est bien 60 kilomètres.

c) A 12 h 45 mn, le cycliste est à 55 kilomètres de A; mais l'automobile arrive à A à 12 h 40 mn et s'y *arrête*. Cette solution ne serait acceptable que si l'automobile continuait sa route. Tel que le problème est posé, cette solution ne convient pas. Mais, le cycliste continuant vers B, il sera à 60 kilomètres de A à 13 heures.

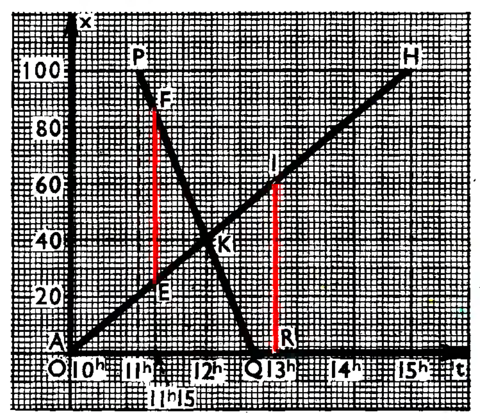


Fig. 104.

5° **Interprétation graphique.** Dans les problèmes où interviennent des mouvements rectilignes et uniformes, on peut donner une illustration graphique de ces mouvements et une interprétation des résultats (*fig. 104*). Traçons deux axes rectangulaires Ot et Ox.

Les unités sont :

sur Ot, 1 mm pour 5 minutes,

sur Ox, 1 cm pour 20 km.

L'origine des temps est 10 h.

Le graphique du mouvement du cycliste est le segment OH dont les extrémités sont l'origine des coordonnées et le point H (15 h, 100 km).

Le graphique du mouvement de l'automobile se compose :

— du segment PQ : P point du départ (11 h, 100 km),
Q point de l'arrivée en A (12 h 40 mn, 0 km);

— de la demi-droite Qt qui représente l'arrêt en A.

Le croisement est représenté par le point K commun à OH et PQ (12 h, 40 km).

A 11 h 15 mn, on obtient E sur OH et F sur PQ et EF = 60 km.

A 13 h, on obtient R sur Qt et I sur OH et RI = 60 km.

166. Problème III. — *On projette un point* M *de l'hypoténuse d'un triangle* ABC, *rectangle en* A, *sur le côté* AB *en* P *et sur le côté* AC *en* Q. *Déterminer le point* M *de façon que le périmètre du rectangle* APMQ *ait une longueur donnée* 2 *l*. *On donne* AB = 4 *et* AC = 3; *l'unité de longueur est le centimètre.*

1° **Choix de l'inconnue.** La position de M est déterminée si l'on connaît la longueur x du segment AP, puisque x étant connu, on en déduit le point P

et enfin le point M sur BC. Nous choisirons donc comme inconnue (*fig. 105*) :

$$AP = x.$$

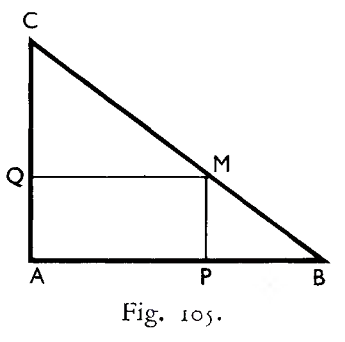


Fig. 105.

Le nombre x doit être positif et inférieur à 4. A la limite, nous pouvons accepter $x = 0$ (P en A, M en C) et $x = 4$ (P en B, M en B). Par suite :

$$\boxed{0 \leqslant x \leqslant 4.} \qquad (1)$$

2° **Mise en équation.** Le périmètre du rectangle APMQ est :

$$2\,MQ + 2\,MP.$$

On a déjà :

$$MQ = AP = x.$$

Évaluons donc la longueur du segment PM. De la double application du théorème de Thalès (n° 89) au triangle ABC coupé par la droite MP parallèle à AC, nous déduisons :

$$\frac{PM}{AC} = \frac{PB}{AB},$$

ce qui donne :

$$\frac{PM}{3} = \frac{4 - x}{4},$$

d'où :

$$PM = \frac{3}{4}(4 - x).$$

En écrivant que le périmètre est $2\,l$, nous obtenons :

$$\boxed{2\,x + \frac{3}{2}(4 - x) = 2\,l.} \qquad (2)$$

Réciproquement, si un nombre x satisfait aux inégalités (1) et à la relation (2), on aura :

$$2\,MQ + 2\,MP = 2\,l.$$

La relation (2) est donc l'équation du problème.

3° **Résolution de l'équation.** On obtient facilement :

$$\boxed{x = 4\,l - 12.} \qquad (3)$$

4° **Retour à la solution du problème.** La solution donnée par (3) conviendra si elle vérifie les inégalités (1).

On aura : $x \geqslant 0$ si $4\,l - 12 \geqslant 0 \iff l \geqslant 3$;
$x \leqslant 4$ si $4\,l - 12 \leqslant 4 \iff l \leqslant 4.$

Nous concluons que le problème admet une seule solution donnée par :

$x = 4\,l - 12$ à la condition que l'on ait : $3 \leqslant l \leqslant 4$.

Si $l = 3$, on a $x = 0$, M est en C;
si $l = 4$, on a $x = 4$, M est en B.

5° **Solution géométrique.** Lorsque le problème posé est un problème de géométrie, il est intéressant de donner, autant que possible, une construction géométrique des éléments inconnus. Cette construction se prête parfois à une discussion qui, naturellement, doit conduire aux mêmes résultats que le calcul. Il y a là un moyen de contrôle non négligeable. Reprenons l'exemple précédent :

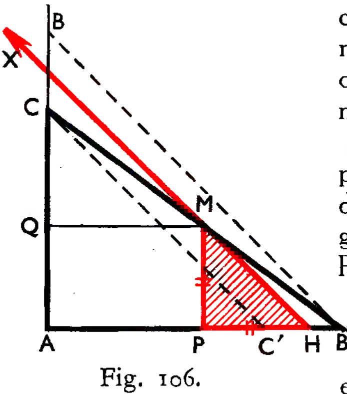


Fig. 106.

Soit ABC le triangle donné (*fig. 106*) et M un point du segment BC. Mettons en évidence le demi-périmètre du rectangle APMQ en prolongeant le segment AP, au-delà de P, d'un segment PH = PM. Nous aurons alors :

$$AH = AP + PH = MQ + MP = l.$$

Le point H est donc connu; on le construira en portant sur le support du côté AB, à partir de A et dans le sens de A vers B, le segment $AH = l$.

On remarque alors que le triangle MPH est isocèle rectangle. Donc l'angle $\widehat{PHM}$ vaut 45° et le point M se trouve sur la demi-droite HX d'origine H, située par rapport au support de AB dans le demi-plan qui contient C et telle que l'angle $\widehat{AHX} = 45°$.

Réciproquement, si la demi-droite HX coupe le segment BC en M, on a :

$$PM = PH,$$

donc :

$$AP + PM = AP + PH = AH = l,$$

et le rectangle APMQ a pour demi-périmètre l.

Il reste à exprimer que la demi-droite HX coupe le segment BC. Il en sera ainsi si elle est située entre les parallèles BB′ et CC′ à HX, tracées par B et C. Autrement dit, le problème aura une solution si H est situé entre B et C′, donc si l'on a :

$$AC' \leqslant AH \leqslant AB$$

ou

$$3 \leqslant l \leqslant 4.$$

On retrouve les résultats du 4°.

167. Problème IV. — *On donne, sur une droite, deux points distincts* A *et* B. *Peut-on trouver sur cette droite un point* M *tel que l'on ait :*

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k,$$

k étant un nombre relatif donné ?

1° **Choix de l'inconnue.** Prenons comme point initial le milieu O du segment AB. Orientons la droite positivement dans le sens de O vers A ; nous obtenons l'axe $x'Ox$ (*fig. 107*) sur lequel la position d'un point M quelconque est définie par son abscisse x (une unité de longueur étant fixée). Cette abscisse est l'inconnue du problème.

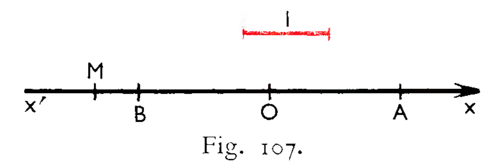


Fig. 107.

2° **Mise en équation.** Soit a l'abscisse de A. L'abscisse de B est $-a$. On a alors, d'après les formules de Chasles :

$$\overline{MA} = \overline{OA} - \overline{OM} = a - x,$$
$$\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM} = -a - x.$$

L'équation du problème est :

$$\boxed{\frac{a - x}{-a - x} = k} \qquad (1)$$

3° **Résolution de l'équation.** L'équation (1) peut s'écrire :

$$a - x = k(-a - x); \qquad (2)$$

les solutions sont acceptables si $-a - x \neq 0$ ou $x \neq -a$. On en déduit :

$$x - kx = a + ka,$$

ou :

$$x(1 - k) = a(1 + k). \qquad (3)$$

Par suite :

$$\boxed{x = a\frac{1 + k}{1 - k}} \quad \text{si } k \neq 1. \qquad (4)$$

4° **Retour à la solution du problème.**

Si $k \neq 1$, la solution donnée par la formule (4) est acceptable si $x \neq -a$
Or l'égalité :

$$x = -a$$

exigerait :

$$-a(1-k) = a(1+k)$$

ou :

$$-a = a; \qquad a = 0;$$

ce qui est impossible puisque les points A et B sont distincts.

Si $k = 1$, l'équation (3) devient :

$$0 = 2a,$$

ce qui est aussi impossible pour la même raison.

Nous pouvons donc conclure :

▪ THÉORÈME. — ***Sur le support d'un segment AB il y a un point M et un seul tel que :***

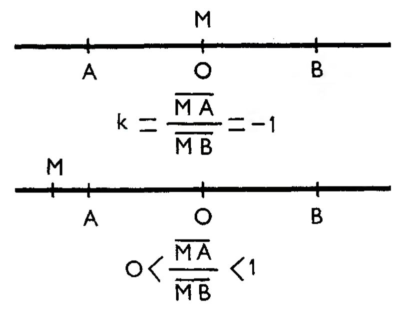
$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \mathbf{k},$$

k étant un nombre relatif donné, différent de 1.

● REMARQUES. I. — Si $k = -1$, la formule (4) montre que l'on a : $x = 0$. Le point M est le *milieu* O de AB.

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1 \iff \textit{M est le milieu du segment AB}$$

II. — Si M se trouve sur le segment AB, les mesures algébriques $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ sont de signes contraires et le rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ est négatif.



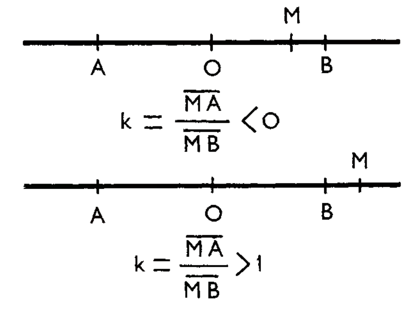


Fig. 108.

Si M se trouve sur le support (D), en dehors du segment AB, les mesures algébriques $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ ont le même signe et le rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ est positif.

Il en résulte que, *réciproquement :*
si $k > 0$, M n'est pas entre A et B; si $k < 0$, M est entre A et B.
Dans le cas particulier où $k = 0$, M est évidemment en A.

168. Problème V. — *On donne, sur une droite* (D), *deux points distincts* A *et* B. *Peut-on trouver, sur cette droite, un point* M *tel que l'on ait :*

$$\frac{MA}{MB} = m, \qquad (1)$$

m étant un nombre positif donné ?

Remarquons d'abord la différence essentielle entre cet énoncé et l'énoncé du n° 167. Ici le rapport $\frac{MA}{MB}$ est le rapport des distances de M aux deux points A et B. C'est un nombre positif quel que soit M. Ce problème a, néanmoins, un lien très étroit avec le précédent.

Il est évident, en effet, que le point M tel que :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = m \qquad (2)$$

et le point M′ tel que :

$$\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = -m \qquad (3)$$

satisfont, tous les deux, à la condition :

$$\frac{MA}{MB} = m. \qquad (1)$$

Réciproquement, si un point M de (D) satisfait à (1), il satisfait à (2) ou à (3) suivant qu'il n'est pas entre A et B ou qu'il est entre A et B. Nous pouvons donc affirmer, en utilisant le théorème du n° 167, qu'il y a *deux points* M répondant à la condition (1).

L'un des points est entre A et B, l'autre est à l'extérieur du segment AB.

Il y a *exception* si $m = 1$ car, dans ce cas, la relation (2) est impossible. La relation (3) devient alors :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1,$$

M est au milieu O du segment AB.

■ THÉORÈME. — ***Sur le support d'un segment AB, il existe deux points, et deux seulement, dont le rapport des distances aux points A et B a une valeur donnée différente de 1.***
1° L'un de ces points est entre A et B, et l'autre à l'extérieur du segment AB.
2° Si le rapport est égal à 1, un seul point répond à la question : le milieu du segment AB.

• REMARQUES. I. — En orientant toujours la droite (D) positivement de O vers A et en posant :

$$\overline{OA} = a, \qquad \overline{OB} = -a,$$

on obtient les abscisses des deux points M et M′ en faisant $k = m$ et $k = -m$ dans la formule générale :

$$x = a\frac{1+k}{1-k}.$$

On trouve : $\overline{OM} = a\dfrac{1+m}{1-m}$ et $\overline{OM'} = a\dfrac{1-m}{1+m}$ $(m \neq 1)$.

Par suite : $$\boldsymbol{\overline{OM}.\overline{OM'} = a^2}$$

Les mesures algébriques $\overline{OM}$ et $\overline{OM'}$, ayant un produit positif a^2, sont donc de même signe.

M M′ A O B

Fig. 109.

Les points M *et* M′ *sont d'un même côté du milieu* O *du segment* AB.

II. — En rappelant que :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = m, \qquad (2)$$

$$\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = -m, \qquad (3)$$

on obtient :

$$\boldsymbol{\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}}$$

Les points M et M′ sont dits *conjugués* par rapport à A et B.

169. Construction géométrique. — Proposons-nous, le segment AB et le nombre positif m étant donnés, de *construire* les points M et M′ tels que :

$$\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = \frac{\text{M'A}}{\text{M'B}} = m.$$

Nous supposerons $m \neq 1$, puisque, si $m = 1$, le problème n'admet qu'une solution : le milieu de AB.

Nous prendrons un exemple. Soit $m = \frac{5}{3}$.

1° **Point M à l'extérieur du segment AB** (*fig. 110*) : $\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = \frac{5}{3}$.

Puisque le rapport $\frac{\text{MA}}{\text{MB}}$ est plus grand que 1, le segment MA est plus grand que le segment MB. Le point M, situé à l'extérieur du segment AB, est donc sur le prolongement de ce segment au-delà de B.

Il doit, en outre, exister un segment contenu 5 fois dans MA et 3 fois dans MB. Il est donc contenu $5 - 3 = 2$ fois dans AB, qui est la différence entre MA et MB. La solution apparaît aussitôt : on divise AB en 2 parties égales et l'on multiplie par 3 l'une de ces parties pour construire le segment MB. Il est alors facile de calculer les longueurs MA, MB et OM si on connaît la longueur de AB. On lit, sur la *figure 110* :

$$\text{MA} = \frac{5}{2}\text{AB}; \qquad \text{MB} = \frac{3}{2}\text{AB}; \qquad \text{OM} = \frac{4}{2}\text{AB} = 2\,\text{AB}.$$

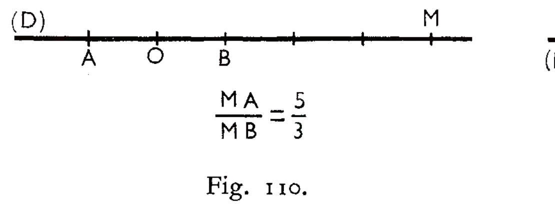


Fig. 110.

(D) M′ A O B — $\frac{\text{M'A}}{\text{M'B}} = \frac{5}{3}$

Fig. 111.

2° **Point M′ entre A et B** (*fig. 111*) : $\frac{\text{M'A}}{\text{M'B}} = \frac{5}{3}$.

Il doit exister un segment contenu 5 fois dans M′A et 3 fois dans M′B. Il est donc contenu $5 + 3 = 8$ fois dans AB qui est la somme de M′A et de M′B. La solution apparaît aussitôt : on divise AB en 8 parties égales et on choisit M′ de manière de M′A soit la somme de 5 de ces parties. Il est alors

facile de calculer les longueurs M′A et M′B, OM′ si on connaît la longueur de AB. On lit, sur la *figure 111* :

$$M'A = \frac{5}{8}AB; \qquad M'B = \frac{3}{8}AB;$$

$$OM' = \frac{AB}{8}.$$

Fig. 112.

Sur la figure d'ensemble (*fig. 112*), on a : $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\dfrac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = \dfrac{5}{3}.$

$$\overline{OM}.\overline{OM'} = \frac{\overline{AB}^2}{4} = \overline{OA}^2$$

On constate bien que M et M′ sont d'un même côté de O, milieu de AB.

• Applications.

761. — *La différence de deux nombres est* 180. *En les augmentant tous les deux de* 4, *le plus grand devient le quadruple du plus petit. Quels sont ces nombres ?*

762. — *Partager* 862 *F en trois parts telles que la seconde soit la moitié de la première et que la troisième surpasse la première de* 158 *F.*

763. — *A une certaine vitesse, une automobile met* 10 *h* 30 *mn pour faire un parcours. Si sa vitesse augmente de* 20 *km/h, l'automobile couvre le même parcours en* 7 *h. Quelle est la vitesse primitive ?*

(¶ La distance parcourue est la même dans les deux cas.)

764. — *Quel nombre faut-il ajouter au numérateur et retrancher du dénominateur de la fraction* $\frac{13}{33}$ *pour obtenir une fraction égale à* $\frac{5}{7}$ *?*

765. — *Deux capitaux sont placés, l'un à* 5 %, *l'autre à* 6 %. *Le second surpasse le premier de* 4 100 *F et son revenu annuel dépasse de* 321 *F le revenu annuel du premier. Calculer les deux capitaux.*

766. — *Les côtés* AB, BC, CA *d'un triangle ont pour mesures respectives* 78 *mm,* 66 *mm,* 48 *mm. Par un point* M *de* AB *on trace la parallèle à* BC, *qui coupe* AC *en* N. *Déterminer la longueur* BM *pour que le périmètre du triangle* AMN *soit égal à* 32 *mm.*

767. — *Reprendre le problème du n° 165 en choisissant pour inconnue l'abscisse* x *du cycliste.*

768. — *Reprendre le problème du n° 166 avec* AB = AC = 3 *cm. Donner une interprétation géométrique.*

769. — *Reprendre le problème du n° 167 avec chacune des valeurs suivantes de* k :

$$k = \frac{3}{4}, \qquad k = -\frac{3}{4};$$
$$k = -2, \qquad k = \sqrt{3}.$$

770. — *Reprendre le problème du n° 168 avec chacune des valeurs suivantes de* m :

$$m = \frac{2}{3}, \qquad m = \frac{3}{4};$$
$$m = 3, \qquad m = \sqrt{2}.$$

771. — *Où se trouve, par rapport au segment* AB, *le point* M *tel que* $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$ *lorsque* $k > 0$? *lorsque* $k < 0$?

772. — *Sur quelle partie du segment* AB *se trouve le point* M *tel que* $\frac{MA}{MB} = m$ *lorsque* $m > 1$? *lorsque* $m < 1$?

773. — *Étant donné un segment* AB, *construire les points* M *et* M' *de la droite* AB *tels que* $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = m$, *dans les cas suivants :*

$$m = \frac{4}{7}, \qquad m = \frac{8}{3}, \qquad m = 2.$$

774. — *Le point* M *du segment* AB *est tel que* $\frac{MA}{MB} = \frac{4}{5}$. *Calculer les mesures de* MA *et* MB *lorsque* AB *mesure 27 cm.*

775. — *Le point* M *est sur l'un des prolongements du segment* AB *et tel que* $\frac{MA}{MB} = \frac{11}{7}$. *Calculer les mesures de* MA *et* MB *lorsque* AB *a pour mesure 12 cm.*

776. — *Tracer un segment* AB *de 10,5 cm; construire le point* M *tel que*

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{3}{4},$$

puis calculer les longueurs des segments MA *et* MB.

777. — *Même exercice que le précédent pour le point* P *tel que :*

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{2}{7}.$$

II. PROBLÈMES A DEUX INCONNUES

Travaux pratiques d'initiation.

1° Combien d'inconnues faut-il calculer pour résoudre le problème suivant : trouver une fraction telle qu'en ajoutant 2 à chaque terme on obtienne $\frac{7}{9}$? Peut-on résoudre la question?

2° Même question, mais cette fois on veut obtenir une fraction " égale à $\frac{7}{9}$ ".

Que manque-t-il pour que le problème n'ait qu'une solution?

3° Une route AB comprend à l'aller une partie pavée suivie d'une partie goudronnée. La vitesse d'un véhicule est 30 km/h sur le pavé et 40 km/h sur la partie goudronnée. Essayer, à partir de ces renseignements, de compléter l'énoncé de façon à avoir un problème à une inconnue ou à deux inconnues, pour calculer finalement la distance AB.

170. Méthode. — Nous retrouverons, dans ces problèmes, les quatre parties :

1° Choix des inconnues (si elles ne sont pas imposées par l'énoncé), *avec des unités à préciser.*

2° Mise en équation.

3° Résolution des équations.

4° Retour à la solution du problème.

171. Problème I. — *Trouver une fraction telle que, si on ajoute 3 à chacun de ses termes, elle devient égale à $\frac{4}{5}$ et que, si on retranche 4 de chaque terme, elle devient égale à $\frac{1}{3}$.*

1° **Choix des inconnues.** Soit x le numérateur et y le dénominateur.

2° **Mise en équation.** On doit avoir :

$$(1) \qquad \frac{x+3}{y+3}=\frac{4}{5} \qquad \text{et} \qquad (2) \qquad \frac{x-4}{y-4}=\frac{1}{3}.$$

3° **Résolution des équations.** La relation (1) donne l'équation :

$$5(x+3) = 4(y+3), \quad \text{si} \quad y \neq -3. \qquad (3)$$

La relation (2) donne l'équation :

$$3(x-4) = y-4, \quad \text{si} \quad y \neq 4. \qquad (4)$$

En réduisant, on obtient le système :

$$\begin{cases} 5x - 4y = -3, \\ 3x - y = 8. \end{cases}$$

On trouve comme solution :

$$x = 5; \qquad y = 7.$$

4° **Retour à la solution du problème.** La fraction cherchée est :

$$\boxed{\frac{5}{7}}$$

(la valeur trouvée $y = 7$ est acceptable puisqu'elle n'est égale ni à -3 ni à 4).

On peut vérifier : $\dfrac{5+3}{7+3} = \dfrac{4}{5}$; $\qquad \dfrac{5-4}{7-4} = \dfrac{1}{3}$.

172. Problème II. — Nous avons vu (n° 111) que le graphique de la fonction :

$$y = ax + b$$

est une droite (D). Si cette droite passe par les points A et B, définis par leurs coordonnées respectives : A (x_0, y_0) et B (x_1, y_1), on a :

$$y_0 = ax_0 + b; \qquad y_1 = ax_1 + b.$$

Inversement, si on se donne deux nombres x_0 et y_0 qui sont les coordonnées d'un point A du plan et deux nombres x_1 et y_1 qui sont les coordonnées d'un point B du plan, on peut se demander s'il est possible de déterminer les coefficients a et b d'une fonction $y = ax + b$ qui aurait pour graphique la droite AB.

Nous traiterons ce problème sur des exemples.

EXEMPLES. *Trouver la fonction* $y = ax + b$ *dont le graphique est la droite* (D) *passant par les points* A *et* B *de coordonnées :*

I. *A (0, 1); B (3, 4).*

On doit avoir :

$$\begin{cases} 1 = b, \\ 4 = 3a + b; \end{cases}$$

d'où : $\qquad b = 1; \qquad a = 1.$

La fonction est : $\qquad y = x + 1.$

II. $A(-1, 3)$; $B(-2, -1)$.

On doit avoir :

$$\begin{cases} 3 = -a + b, \\ -1 = -2a + b; \end{cases}$$

d'où : $a = 4$; $b = 7$.

La fonction est : $y = 4x + 7$.

173. Problème III. — Puisque la loi horaire d'un mouvement rectiligne uniforme qui lie l'abscisse x du mobile à la date t est une fonction du premier degré : $x = vt + h$ où v désigne la vitesse,

le problème que nous avons étudié permet donc de déterminer la loi horaire d'un tel mouvement connaissant les abscisses x_0 et x_1 du mobile aux dates respectives t_0 et t_1.

Exemples. *Calculer la vitesse et déterminer la loi horaire d'un mouvement rectiligne et uniforme sachant que :*

I. *A la date* $t_0 = 0$, *l'abscisse du mobile est* $x_0 = -4$.
A la date $t_1 = +1$, *l'abscisse du mobile est* $x_1 = +5$.

(unités : cm et seconde).

On doit avoir :

$$\begin{cases} -4 = h, \\ 5 = v + h; \end{cases}$$

d'où : $h = -4$; $v = 9$.

La loi horaire est : $x = 9t - 4$.

Le mobile se déplace dans le sens positif et parcourt 9 cm en 1 s.

II. *A la date* $t_0 = -2$ *l'abscisse du mobile est* $x_0 = +3$.
A la date $t_1 = +1$ *l'abscisse du mobile est* $x_1 = -1$.

On doit avoir :

$$\begin{cases} +3 = -2v + h, \\ -1 = v + h; \end{cases}$$

d'où : $v = \frac{-4}{3}$; $h = +\frac{1}{3}$.

La loi horaire est : $x = \frac{-4t + 1}{3}$.

Le mobile se déplace dans le sens négatif et parcourt $\frac{4}{3}$ cm en 1 s.

174. Problème IV. — *Un trajet, sur une route, comprend une montée de 24 km suivi d'une descente de 36 km. Deux cyclistes, partis en même temps, font la montée à des vitesses moyennes différentes et le premier a 10 mn d'avance sur le second au sommet de la côte. Mais dans la descente, le premier descend avec une vitesse double de sa vitesse de montée alors que le second descend avec une vitesse triple de sa vitesse de montée. Il rattrape ainsi son retard, dépasse l'autre cycliste et parvient à l'arrivée 5 mn avant lui. Déterminer les durées de trajet de chaque cycliste, le lieu du dépassement, leurs vitesses de montée et de descente.*

1° **Choix des inconnues.** Nous prenons pour unité de durée l'heure et pour unité de longueur le kilomètre.

Soit alors v et v' les vitesses de montée avec $v > v'$.

2° **Mise en équation.** Les temps de montée sont respectivement :

$$\frac{24}{v} \quad \text{et} \quad \frac{24}{v'}.$$

L'énoncé indique que le premier a 10 mn $\left(\text{ou } \frac{1}{6} \text{ h}\right)$ d'avance à la montée.

Donc :

$$\frac{24}{v'} - \frac{24}{v} = \frac{1}{6}. \tag{1}$$

Dans la descente le cycliste le plus rapide a mis 15 mn de moins que l'autre soit $\frac{1}{4}$ h. Donc :

$$\frac{36}{2v} - \frac{36}{3v'} = \frac{1}{4}. \tag{2}$$

3° **Résolution des équations.** Nous avons à résoudre le système des équations (1) et (2) :

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{24}{v'} - \dfrac{24}{v} = \dfrac{1}{6}, & (1) \\ \dfrac{36}{2v} - \dfrac{36}{3v'} = \dfrac{1}{4}. & (2) \end{array} \right.$$

En prenant comme inconnues auxiliaires : $\frac{12}{v'} = \text{X}$ et $\frac{12}{v} = \text{Y}$, nous obtenons le système :

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} 2\text{X} - 2\text{Y} = \dfrac{1}{6}. \\ \dfrac{3\text{Y}}{2} - \text{X} = \dfrac{1}{4}. \end{array} \right.$$

On en déduit : $X = \frac{3}{4}$ et $Y = \frac{2}{3}$.

Par suite : $v = 18$ (km à l'heure) et $v' = 16$ (km à l'heure).

4° **Retour à la solution du problème.** Le premier cycliste parcourt la montée en $\frac{24}{18}$ h = 1 h 20 mn et la descente en $\frac{36}{36}$ h = 1 h. La durée totale est 2 h 20 mn. Le second cycliste parcourt la montée en $\frac{24}{16}$ h = 1 h 30 mn et la descente en $\frac{36}{48}$ h = 45 mn. La durée totale est 2 h 15 mn. Le second cycliste arrive donc bien 5 mn avant le premier.

Si z est la distance du lieu de dépassement à l'arrivée, cette distance est parcourue en :

$$\frac{z}{36}\text{ h par l'un et } \frac{z}{48}\text{ h par l'autre et l'on a :}$$

$$\frac{z}{36} - \frac{z}{48} = \frac{1}{12}, \qquad \left(\text{puisque } 5 \text{ mn} = \frac{1}{12}\text{ h}\right).$$

D'où, en multipliant par 144 :

$$4z - 3z = 12; \qquad z = 12.$$

Le dépassement a lieu à 12 km de l'arrivée, soit à 48 km du départ, c'est-à-dire 2 h après le départ.

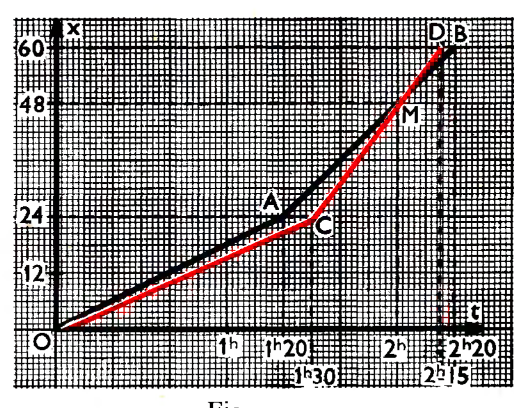


Fig. 113.

5° **Interprétation graphique.** Par rapport à deux axes de coordonnées Ot et Ox, on peut tracer les graphiques des deux mouvements :

unités sur Ot, 1 cm pour 20 mn,
sur Ox, 1 cm pour 12 km (*fig. 113*).

Le mouvement du premier cycliste est représenté par les segments OA et AB.

Le mouvement de l'autre est représenté par les segments OC et CD.

Les segments AB et CD se coupent en M. L'ordonnée de M, qui est 48 km, indique que le dépassement a eu lieu à 48 km du point de départ.

• **Applications.**

778. — *La différence des aires de deux terrains carrés est 464 m^2 et la différence de leurs périmètres est 32 m. Calculer leurs côtés.*

779. — *Les deux facteurs d'un produit ont pour somme 36. Si l'on diminue l'un de 4, l'autre de 6, le produit diminue de 160. Trouver les deux facteurs.*

780. — *Trouver une fraction telle qu'en ajoutant 3 à chacun de ses termes, elle devient égale à $\frac{7}{10}$ tandis que, si l'on retranche 3 de chaque terme, elle devient égale à $\frac{1}{4}$.*

781. — 1° *Quelle est la fonction dont le graphique est la droite passant par les points*

$$A(x = -2,\ y = -7) \quad et \quad B(x = 2,\ y = 1)?$$

2° *Même exercice avec les points* $A(x = 1,\ y = 1)$ $B(x = 2,\ y = -2)$.

782. — 1° *Calculer le coefficient de direction de la droite qui passe par les points :*

$$M(x = -2,\ y = 9) \quad et \quad N(x = 4,\ y = -3).$$

2° *Même exercice avec les points* $M(x = -1,\ y = -7)$ *et* $N(x = 3,\ y = 13)$.

783. — 1° *Deux mobiles parcourent la même trajectoire rectiligne et leurs lois horaires respectives sont :* $x = 3t - 10$; $x = -2t + 5$.

Calculer la date et l'abscisse de leur rencontre. Y a-t-il croisement ou dépassement ?

2° *Reprendre l'exercice précédent en utilisant les graphiques des deux mouvements.*

EXERCICES ET PROBLÈMES

★

784. — Dans une fraction plus petite que 1, la différence des termes est 33. On ajoute 6 à chaque terme et la nouvelle fraction est égale à $\frac{1}{4}$. Quelle est la fraction primitive? (¶ *Désigner la fraction par* $\frac{x}{x+33}$.)

785. — Quel même nombre faut-il ajouter aux dénominateurs des fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$ pour que la somme des fractions obtenues soit égale à 9 fois leur produit?

786. — Un libraire a vendu 328 exemplaires d'un ouvrage, la moitié au prix du catalogue, l'autre moitié avec une réduction de 10 % sur ce prix. Il avait obtenu de l'éditeur une remise de 25 % sur le prix du catalogue. Il a ainsi gagné 984 F. Quel est le prix d'un ouvrage d'après le catalogue?

787. — Un commerçant achète une marchandise qu'il revend avec un bénéfice égal au quart du prix de vente. En gagnant 120 F de moins, il réaliserait un bénéfice égal au cinquième du prix d'achat. Quel est son bénéfice?

788. — Un cycliste doit parcourir un certain trajet. Il a calculé qu'à la vitesse de 20 kilomètres à l'heure, il arriverait un quart d'heure plus tôt qu'en parcourant 920 mètres en 3 minutes. Quelle est la longueur du trajet?

789. — Une personne veut faire une promenade; elle prend au départ une voiture faisant 12 kilomètres à l'heure. A quelle distance du point de départ devra-t-elle quitter la voiture pour que, revenant à pied et faisant 4 kilomètres à l'heure, elle soit de retour 5 heures après son départ?

790. — Un homme est allé à pied d'une ville à une autre par le chemin direct, à la vitesse de 6 kilomètres à l'heure. Il est revenu à bicyclette par un itinéraire allongé de 6 km à la vitesse de 18 kilomètres à l'heure. La durée totale des deux trajets a été 3 h 40 mn. Calculer la longueur du chemin direct entre les deux villes.

791. — Une personne fait trois placements, le premier à 4 %, le second à 5 % et le troisième à 6 %. Le dernier surpasse le premier de 1 580 F; le second est la moitié du premier; le revenu total est 1 279 F. Quel est le montant de chaque placement?

792. — Soit un segment AB de 42 mm et son milieu O.
1° Construire les points M et M' de la droite AB tels que :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = \frac{3}{4}.$$

2° Calculer les distances $\overline{AM}$, $\overline{BM}$, $\overline{AM'}$, BM', OM, OM', MM'.

3° Évaluer les rapports $\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}}$ et $\frac{\overline{M'A}}{\overline{AB}}$.

793. — Les deux facteurs d'un produit ont pour somme 56. Si l'on augmente l'un de 4 et qu'on diminue l'autre de 4, le produit diminue de 48. Calculer les deux facteurs.

794. — Le périmètre d'un rectangle est 110 m. Si l'on augmente une de ses dimensions de 5 m et l'autre de 2 m, son aire augmente de 160 m^2. Calculer ses dimensions.

795. — Dans une réunion d'enfants, le nombre des filles surpasse de 26 le nombre des garçons. Après le départ de 15 garçons et de 15 filles, le nombre des filles est triple de celui des garçons. Combien y avait-il primitivement de filles et de garçons?

796. — Quels sont les âges de deux personnes, sachant qu'il y a 5 ans, l'âge de la plus jeune était les $\frac{2}{3}$ de celui de l'autre, et que, dans un an, il en sera les $\frac{3}{4}$.

797. — Un père a deux enfants dont l'un a 3 ans de plus que l'autre. L'an dernier, l'âge du père était le double de la somme des âges de ses enfants; dans 20 ans, il sera égal à cette somme. Calculer les âges du père et de ses deux enfants.



798. — Un cycliste et un piéton parcourent une route dans le même sens; ils partent en même temps de deux points A et B distants de 45 kilomètres; on sait que la vitesse du cycliste est quadruple de celle du piéton. On demande :

1° de déterminer à quelle distance de A sera le point M où le cycliste atteindra le piéton;

2° de dire à quelle distance de B était le piéton lorsqu'il avait sur le cycliste une avance de 9 kilomètres;

3° de dire à quelle distance de B sera le piéton lorsque le cycliste aura sur lui une avance de 18 kilomètres.

799. — Un trapèze convexe de hauteur 15 cm a pour bases AB = 6 cm, CD = 9 cm. A quelle distance de la base AB faut-il tracer une parallèle aux bases pour que la portion de cette parallèle située à l'intérieur du trapèze ait une longueur égale à 8 cm? à 5 cm? à 10 cm?

800. — Soit un triangle ABC dans lequel BC = 12 cm, AC = 15 cm, AB = 10 cm. On prend sur le côté AC un point D et l'on désigne par x la mesure en centimètres du segment CD. Par D on trace la parallèle à BC qui coupe AB en E.

1° Calculer BE en fonction de x.

2° Calculer DE en fonction de x.

3° Déterminer x pour que DE = BE + CD. Donner une construction géométrique.

801. — 1° Le côté BC d'un triangle a pour mesure 8 cm et la hauteur AH 4 cm. On veut inscrire dans ce triangle un rectangle MNPQ, ayant ses sommets P et Q sur BC, M sur AB et N sur AC. Quelle doit être la longueur MQ pour que le périmètre du rectangle MNPQ soit égal à 12 cm.

2° Reprendre le même problème avec BC = 4 cm, AH = 8 cm, le périmètre du rectangle étant toujours 12 cm.

3° Reprendre le même problème avec BC = 4 cm, AH = 8 cm, le périmètre du rectangle étant 18 cm.

802. — Un segment AB, de milieu O, a pour mesure 64 millimètres.

1° Construire les points M et M′, de la droite AB, et tels que :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = \frac{3}{7}$$

2° Calculer MM′.

3° Vérifier les relations :

$$\overline{OM}.\overline{OM'} = \overline{OA}^2; \qquad \overline{IA}.\overline{IB} = \overline{IM}^2; \quad \text{(I milieu de MM')};$$

$$\overline{M'M}.\overline{M'O} = \overline{M'A}.\overline{M'B};$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{MM'}^2 = 4\,\overline{OI}^2;$$

$$\left(\frac{BM}{BM'}\right)^2 = \frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}};$$

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AM}} + \frac{1}{\overline{AM'}}; \qquad \frac{2}{\overline{MM'}} = \frac{1}{\overline{MA}} + \frac{1}{\overline{MB}}.$$

803. — Soit x la mesure en centimètres d'un segment AB et M et M′ les points tels que

$$\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = -\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{3}{5}.$$

Déterminer x de manière que l'on ait MM′ = 24 cm. (¶ *Calculer* MM′ *en fonction de* x.)

804. — Soit A et B les points d'un axe, de point initial O, qui ont pour abscisses respectives — 2 et + 3.

1° Déterminer l'abscisse du point M tel que : $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$.

2° Déterminer l'abscisse du point N tel que : $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$

3° Déterminer l'abscisse du point P tel que : $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}$.

805. — Les dimensions d'un rectangle sont mesurées, en centimètres, par les nombres x et y.

1° Si l'on augmente x de 3 cm et y de 2 cm, quelle est, en fonction de x et de y, l'augmentation de l'aire du rectangle?

2° En admettant que x et y varient de manière que cette augmentation reste constante et égale à 18 cm², y est alors fonction de x. Représenter graphiquement cette fonction.

3° Dans ce dernier cas, déterminer les dimensions x et y, sachant qu'elles sont les mesures des côtés d'un rectangle ayant 10 cm de périmètre. (B. E. P. C.)

806. — M étant un point quelconque d'un segment AB, de 5 cm, on appellera x et y les mesures respectives en centimètres de AM et BM.

1° Calculer x et y pour que :

$$2\,\text{AM} + \text{BM} = 7 \text{ centimètres.}$$

2° Représenter graphiquement les fonctions :

$$y = -x + 5 \qquad \text{et} \qquad y = -2x + 7$$

et retrouver graphiquement le résultat de la question 1°.

3° Peut-on trouver x et y pour que l'on ait :

$$2\,\text{AM} + \text{BM} = 4 \text{ centimètres?}$$

Donner une solution algébrique et une solution graphique de cette question.

(B. E. P. C.)

807. — Quel nombre faut-il ajouter au numérateur a et au dénominateur b d'une fraction $\frac{a}{b}$ pour former une seconde fraction égale au double de la première? On se contentera de traiter cette question successivement dans chacun des trois cas particuliers suivants :

1° $a = 78, \quad b = 159;$
2° $a = 2, \quad b = 3;$
3° $a = 17, \quad b = 34.$ (B. E. P. C.)

808. — La recette des entrées au musée a été un certain jour 134 F pour 140 entrées de grandes personnes et 55 entrées d'enfants.

Le lendemain, les prix d'entrée étaient réduits de 25 % pour les grandes personnes et de 50 % pour les enfants. La recette s'est élevée à 112 F pour 180 grandes personnes et 20 enfants.

Quels sont les prix d'entrée normaux par grande personne et par enfant?

(B. E. P. C.)

809. — On donne un carré ABCD de 2 cm de côté. Par un point M variable de la diagonale AC, pris entre A et C, on trace les parallèles aux côtés du carré. Elles coupent en I le côté AB, en J le côté BC, en K le côté CD, en L le côté DA.

On désigne par x la mesure en centimètres du segment AI.

1° Exprimer, en fonction de x, les aires des quadrilatères :

MIAL, MJBI, MKCJ, MLDK.

2° Calculer le rapport h de l'aire du carré MIAL à celle de l'hexagone MJBADK, ainsi que le rapport k de l'aire du carré MKCJ à l'aire de l'hexagone MLDCBI.

3° Pour quelle valeur de x les rapports h et k sont-ils égaux?

(B. E. P. C.)

★ ★ ★

810. — 1° Sur un rayon de bibliothèque de 150 cm de long se trouvent côte à côte 42 livres d'épaisseurs 3 cm et 5 cm. Combien y a-t-il de livres de chaque sorte?

2° En maintenant les données suivantes : « nombre de livres : 42, épaisseurs : 3 cm et 5 cm », on suppose que la longueur du rayon de la bibliothèque est de n cm. Quelles valeurs peut-on donner à n pour que le problème soit possible? Combien le problème admet-il de solutions?

N.-B. — Dans les deux cas, on suppose que le rayon est occupé en totalité.

(Admission aux E. N.)

811. — Les deux aiguilles d'une montre seront dites en coïncidence quand l'une d'elles sera sur l'autre, en opposition quand l'une sera dans le prolongement de l'autre, en quadrature quand l'une formera avec l'autre un angle droit. L'instant initial est 12 heures, les aiguilles étant alors en coïncidence.

1° t étant le temps, exprimé en heures, qui s'écoule à partir de 12 heures, calculer en fonction de t les angles, exprimés en degrés, dont tournent respectivement la grande et la petite aiguille. Représenter sur un même graphique les variations de ces angles dans l'intervalle de 12 h à 24 h (1 cm pour 1 h, 1 cm pour 360°).

2° Déterminer, à 1 seconde près, l'heure où pour la première fois les deux aiguilles sont à nouveau en coïncidence. Déterminer en fonction de n l'heure de la $n^{ième}$ coïncidence. Résoudre ce problème algébriquement et graphiquement.

3° Déterminer, à 1 seconde près, l'heure de la première opposition, de la première quadrature. Déterminer en fonction de n l'heure de la $n^{ième}$ opposition, de la $n^{ième}$ quadrature. Ces deux problèmes ont-ils des solutions qui soient des nombres entiers?

(Admission aux E. N.)

812. — Soit un triangle isocèle ABC, de base BC = 12 cm, de hauteur AH = 8 cm et un point M, pris sur le segment BH; on désigne par x la mesure en centimètres du segment BM. Par M on trace la parallèle à AH, qui rencontre AB en P et le prolongement de AC en Q.

1° Calculer, en fonction de x, les longueurs des segments MP et MQ, ainsi que le rapport $\frac{MP}{MQ}$.

2° Pour quelle valeur de x le rapport $\frac{MP}{MQ}$ est-il égal à $\frac{1}{3}$?

3° Représenter graphiquement, par rapport aux mêmes axes, les variations de MQ et de 3 MP, lorsque M se déplace de B à H, et vérifier le résultat trouvé dans la question 2°.

(Admission aux E. N.)

813. — Un mobile parcourt une distance AB aller et retour : l'aller à la vitesse moyenne de 25 km par heure et le retour à la vitesse moyenne de 20 km par heure. Sachant qu'il s'arrête 1 heure en B et que la durée totale du parcours aller et retour et arrêt compris est 10 heures, on demande :

1° de calculer la distance AB;

2° de représenter graphiquement le mouvement du mobile depuis son départ de A jusqu'à son retour en A.

(Abscisses : 1 cm pour 1 h; ordonnées : 1 cm pour 10 km).

Le graphique comporte trois lignes; établir les lois horaires qu'elles représentent.

3° Un deuxième mobile part de A, 5 heures après le départ du premier, à la vitesse de 60 km par heure. Trouver à quelle distance de A se rencontrent les deux mobiles et au bout de combien de temps.

4° Représenter graphiquement le mouvement du second mobile par rapport aux mêmes axes. Établir la loi horaire de son mouvement. Trouver par le calcul et sur le graphique les réponses à la question 3°.

(B. E. P. C.)

814. — Dans un triangle ABC les côtés AB, CB, CA ont pour mesures respectives 4, 5 et 6 cm. Par un point M du côté AB, situé entre A et B, à la distance AM = x centimètres, on trace la parallèle à BC, qui coupe AC en N.

1° Évaluer, en fonction de x, les longueurs respectives (en cm) y_1 et y_2 des lignes polygonales AMNC et ANMB. Représentation graphique, sur un même dessin, des variations de ces longueurs quand x varie dans les limites permises par le problème. Montrer, en utilisant le graphique, que les deux lignes polygonales peuvent avoir même longueur. Contrôler ces résultats par le calcul.

2° Reprendre toutes les questions du 1° en substituant aux longueurs y_1 et y_2 des lignes polygonales, les périmètres respectifs z_1 et z_2 du triangle AMN et du trapèze BMNC.

3° On désire maintenant que la somme des aires des carrés de côtés AM et NC soit égale à l'aire du carré de côté MN. Calculer x. Vérifier. (On évitera de résoudre une équation du second degré.)

(Admission aux E. N.)

CHAPITRE XI

TRIANGLES SEMBLABLES

I. TRIANGLES SEMBLABLES

Travaux pratiques d'initiation.

1° Construire un triangle ABC et une parallèle au côté BC coupant les droites AB et AC respectivement en M et N.
Comparer les angles du triangle AMN aux angles du triangle ABC.

2° Retrouver, en se reportant au n° 89, les relations entre les côtés du triangle AMN et ceux du triangle ABC.

3° Dessiner deux triangles isocèles ayant pour angle principal 45°. Peut-on les placer dans des positions comparables à celles des triangles ABC et AMN et cela de plusieurs façons? (On pourra découper ces triangles sur des papiers de couleurs différentes.)

4° Même exercice qu'au 3° en utilisant deux triangles équilatéraux, deux triangles rectangles et isocèles, deux triangles rectangles ayant un angle de 40°.

175. Triangles semblables. — Soit un triangle ABC. Traçons une droite (D) parallèle au support de BC et ne passant pas par A. La droite (D) coupe les supports respectifs de AB et de AC en B′ et C′. Nous avons déjà démontré (double application du théorème de Thalès) que l'on a, dans ce cas :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Les côtés du triangle AB′C′ sont proportionnels aux côtés du triangle ABC. Comparons les angles de ces triangles.

Examinons les trois cas de figure possibles (*fig. 114*) :

$\widehat{BAC} = \widehat{B'AC'}$ { angles confondus (*fig. I et II*), angles opposés par le sommet (*fig. III*);

$\widehat{ABC} = \widehat{AB'C'}$ { angles correspondants (*fig. I et II*),
$\widehat{ACB} = \widehat{AC'B'}$ { angles alternes-internes (*fig. III*).

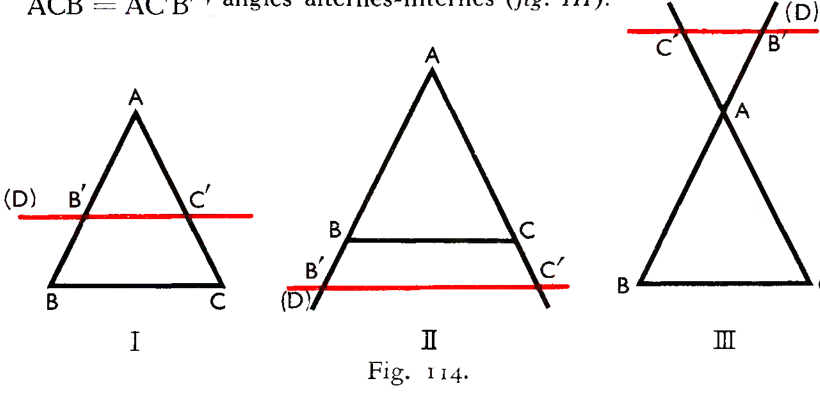


Fig. 114.

On appelle *angles homologues* les angles respectivement égaux :

$\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'AC'}$; $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AB'C'}$; $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AC'B'}$.

En résumé, les deux triangles ABC et AB′C′ ont leurs angles respectivement égaux et les côtés opposés aux angles de l'un sont proportionnels aux côtés opposés aux angles homologues de l'autre. Deux côtés opposés à deux angles homologues sont d'ailleurs appelés *côtés homologues*. Nous dirons que les deux triangles ABC et AB′C′ sont *semblables*.

☆ DÉFINITION. — ***On dit que deux triangles sont* semblables *pour exprimer que leurs angles sont respectivement égaux et que les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés respectivement opposés aux angles homologues de l'autre.***

L'étude précédente démontre l'existence de triangles semblables et nous énoncerons :

▪ THÉORÈME. — ***Toute parallèle au support d'un côté d'un triangle détermine avec les supports des deux autres côtés un triangle semblable au premier.***

• REMARQUES. Il est évident que :

1° *Deux triangles égaux sont semblables.*

2° *Deux triangles semblables à un troisième sont semblables entre eux.*

3° *Si deux triangles sont semblables, tout triangle égal à l'un d'eux est semblable à l'autre.*

176. Rapport de similitude. — Dorénavant, quand nous désignerons deux triangles semblables nous nommerons les sommets suivant l'ordre dans lequel les angles sont homologues. Ainsi quand nous parlerons des triangles semblables DEF et ABC cela signifiera que (*fig. 115*) :

$$\widehat{D} = \widehat{A}; \quad \widehat{E} = \widehat{B}; \quad \widehat{F} = \widehat{C};$$

$$\frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = \frac{DE}{AB}.$$

Ce souci d'ordre épargnera des erreurs.

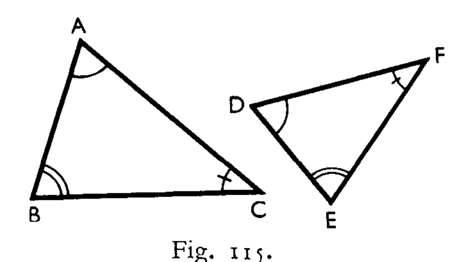


Fig. 115.

☆ DÉFINITION. — ***Quand deux triangles sont semblables, le rapport d'un côté quelconque de l'un au côté homologue de l'autre est appelé* rapport de similitude *du premier triangle au second.***

Si l'on désigne par k le rapport de similitude du triangle DEF au triangle semblable ABC on a :

$$k = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = \frac{DE}{AB}. \qquad (1)$$

Le rapport de similitude du triangle ABC au triangle DEF est $\frac{1}{k}$.

177. Construction d'un triangle semblable à un triangle donné. — Soit ABC un triangle donné. Donnons-nous *arbitrairement* le rapport de similitude k du triangle DEF, à construire semblable au triangle ABC.

Nous connaissons les angles du triangle DEF puisque :

$$\widehat{D} = \widehat{A}; \quad \widehat{E} = \widehat{B}; \quad \widehat{F} = \widehat{C}. \qquad (2)$$

Nous connaissons aussi les côtés du triangle DEF puisque, d'après (1) :

$$EF = k.BC; \quad DF = k.AC; \quad DE = k.AB. \qquad (3)$$

Nous connaissons donc les 6 éléments du triangle DEF. Il semble que les données soient surabondantes puisque, par exemple, la connaissance d'un côté et de deux angles (dont la somme ne dépasse pas un angle plat) d'un triangle suffit pour que l'on puisse construire ce triangle.

Cependant, le théorème du n° 175, va nous permettre de démontrer que le problème est possible. Marquons sur le support du côté AB, un point B′ tel que AB′ = DE (B et B′ du même côté de A) et traçons par B′ la parallèle au support de BC. Cette parallèle coupe le support de AC en C′. Nous savons (n° 175) que les triangles ABC et AB′C′ sont semblables. Comparons les triangles DEF et AB′C′.

Nous avons (*fig. 116*) :

$$\widehat{DEF} = \widehat{AB'C'} \begin{cases} \widehat{DEF} = \widehat{ABC} & \text{par hypothèse,} \\ \widehat{ABC} = \widehat{AB'C'} & \text{comme angles correspondants,} \end{cases}$$

$$DE = AB' \quad \text{par construction,}$$

$$\widehat{EDF} = \widehat{B'AC'} \quad \text{par hypothèse.}$$

Les triangles DEF et AB′C′ sont donc égaux (1er cas d'égalité). Il existe donc un triangle DEF égal au triangle AB′C′ donc semblable au triangle ABC et remplissant les conditions (2) et (3) ci-dessus. Avant d'énoncer le résultat, remarquons que les triangles semblables ABC et AB′C′ ont une disposition particulière. Nous dirons qu'ils sont *homothétiques*. Nous préciserons plus tard la signification plus générale de ce terme, mais nous en ferons, dès maintenant, usage dans le sens que nous venons d'indiquer.

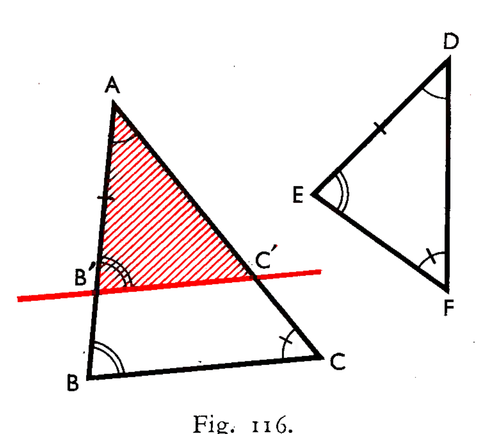


Fig. 116.

☆ DÉFINITION. — ***Deux triangles* homothétiques *sont deux triangles qui ont un angle commun et dont les côtés opposés à l'angle commun sont parallèles.***

Nous énoncerons alors :

▪ THÉORÈME. — ***Un triangle semblable à un triangle donné s'obtient en construisant un triangle égal à un triangle homothétique du premier.***

● **Applications.**

815. — *Un triangle* ABC *a pour côtés :* AB = 8 *cm*, BC = 6 *cm*, CA = 7 *cm. Un point* M *sur* AB *est à* 2 *centimètres de* A *entre* A *et* B. *On trace par* M *la parallèle à* AC, *qui coupe* BC *en* N. *Calculer le rapport de similitude du triangle* BMN *au triangle* ABC. *Calculer les côtés du triangle* BMN.
Mêmes questions si l'on place M *à* 2 *cm de* A *sur le prolongement de* BA.

816. — *Un triangle a des côtés de* 6, 8 *et* 9 *centimètres. Un autre triangle, qui lui est semblable, a deux côtés de* 8 *et* 12 *centimètres. A quels côtés du premier triangle sont-ils homologues ? Calculer le troisième côté.*

817. — *Un triangle a des côtés de* 15, 18 *et* 21 *centimètres. Un autre triangle, qui lui est semblable, a un côté de* 12 *centimètres. Quelles peuvent être les mesures de ses deux autres côtés ?*

818. — 1° *Évaluer le rapport des périmètres de deux triangles semblables.*
2° *Un triangle a pour côtés* 16, 24 *et* 25 *centimètres. Calculer les côtés d'un triangle qui lui est semblable et de périmètre* 41,6 *cm.*

II. CAS DE SIMILITUDE

Travaux pratiques d'initiation.

1° Deux triangles ABC, DEF sont tels que :

$$\widehat{A} = \widehat{D}; \quad \widehat{B} = \widehat{E}; \quad AB = DE.$$

Que peut-on dire de ces triangles?

2° Deux triangles ABC, DEF sont tels que :

$$\widehat{A} = \widehat{D}; \quad \widehat{B} = \widehat{E}; \quad AB \neq DE.$$

Existe-t-il une égalité entre deux éléments, non mentionnés ci-dessus, de ces triangles?

On superpose les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{D}$. Les droites EF et BC ont-elles alors nécessairement la même direction?

3° Deux triangles ABC, DEF sont tels que : $\widehat{A} = \widehat{D}$. On superpose ces angles de manière que E se place sur le support de AB et F sur le support de AC. Trouver une égalité ne faisant intervenir aucun angle et qui entraîne que EF est parallèle à BC.

178. Cas de similitude. — Les trois cas d'égalité des triangles vont nous conduire à trois constructions qui nous permettront de reconnaître si deux triangles sont semblables. Les théorèmes que nous obtiendrons s'appellent les *cas de similitude des triangles*. A cet effet, nous chercherons à construire un triangle DEF égal à un triangle AB′C′ homothétique de ABC (B′C′ // BC, $\widehat{A}$ commun); le triangle DEF sera alors semblable au triangle ABC.

179. Premier cas de similitude. — Construisons le triangle DEF tel que :

$$DE = AB'; \quad \widehat{D} = \widehat{A};$$
$$\widehat{E} = \widehat{B'} = \widehat{B} \quad (\textit{fig. 117}).$$

Nous savons que le triangle DEF est égal au triangle AB′C′ (premier cas d'égalité des triangles) et, par suite, le triangle DEF est semblable au triangle ABC.

Cherchons comment, en fait, nous avons déduit le triangle DEF du triangle ABC. Le choix *arbitraire*

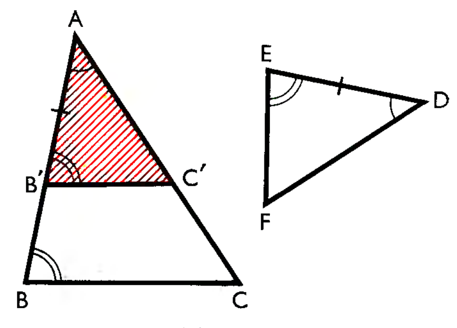


Fig. 117.

du rapport de similitude $k = \frac{AB'}{AB}$ nous a simplement permis de construire le côté $DE = AB' = k.AB$. Mais ce sont uniquement les égalités des angles $\widehat{D}$ et $\widehat{A}$ d'une part, $\widehat{E}$ et $\widehat{B}$ d'autre part, qui ont assuré la similitude.

▪ THÉORÈME. ***(Premier cas de similitude). — Si deux triangles sont tels que deux angles de l'un soient respectivement égaux à deux angles de l'autre, ils sont semblables.***

$$\boxed{\begin{matrix}\widehat{D} = \widehat{A} \\ \widehat{E} = \widehat{B}\end{matrix}} \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\widehat{F} = \widehat{C} \\ \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}\end{matrix}}$$

CAS PARTICULIERS.

1° *Deux triangles équilatéraux sont semblables.*

2° *Deux triangles isocèles dont les quatre angles à la base sont égaux sont semblables (fig. 118).*

$$\boxed{\begin{matrix}AB = AC \\ DE = DF \\ \widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{B} = \widehat{C}\end{matrix}} \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\widehat{D} = \widehat{A} \\ \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}\end{matrix}}$$

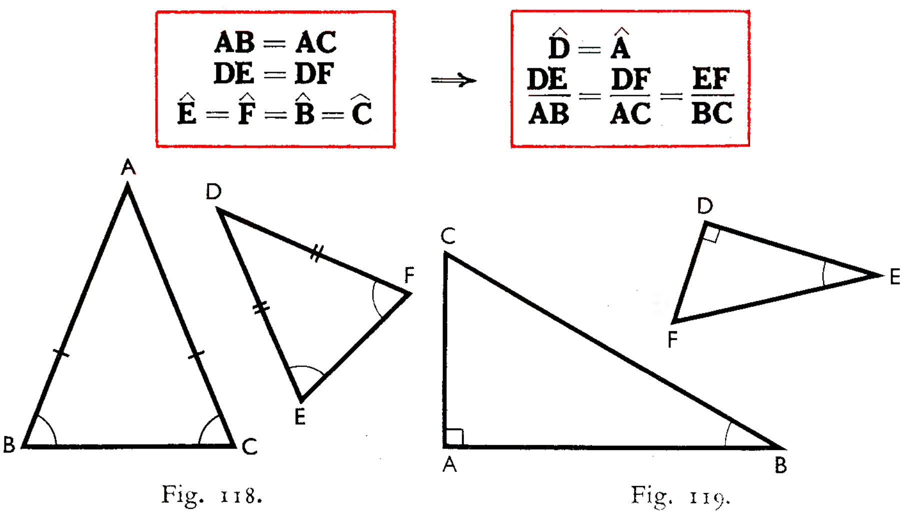


Fig. 118. Fig. 119.

3° *Deux triangles rectangles tels qu'un angle aigu de l'un soit égal à un angle aigu de l'autre sont semblables (fig. 119).*

$$\boxed{\begin{matrix}\widehat{A} = \widehat{D} = 1\text{ D} \\ \widehat{B} = \widehat{E}\end{matrix}} \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\widehat{F} = \widehat{C} \\ \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}\end{matrix}}$$

180. Deuxième cas de similitude. — Construisons cette fois, le triangle DEF tel que :

$$DE = AB'; \quad DF = AC'; \quad \widehat{D} = \widehat{A} \quad (\textit{fig. 120}).$$

Le triangle DEF est égal au triangle AB′C′ (deuxième cas d'égalité des triangles) et, par suite, le triangle DEF est semblable au triangle ABC.

Cherchons comment, en fait, nous avons déduit le triangle DEF du triangle ABC. Le choix *arbitraire* du rapport de similitude :

$$k = \frac{AB'}{AB}$$

nous a donné les côtés :

$$DE = AB' = k.AB,$$
$$DF = AC' = k.AC,$$

tels que :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}.$$

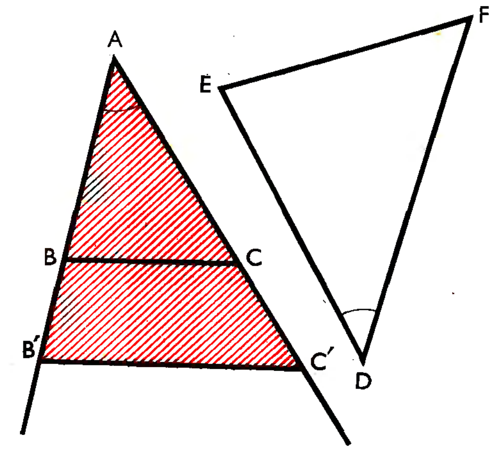


Fig. 120.

Cette égalité, jointe à celle des angles $\widehat{D}$ et $\widehat{A}$, a assuré la similitude.

▪ THÉORÈME. ***(Deuxième cas de similitude). — Si deux triangles sont tels :***

1° qu'un angle de l'un est égal à un angle de l'autre;
2° que les côtés qui limitent l'un de ces angles sont proportionnels aux côtés qui limitent l'autre angle,

ces triangles sont semblables.

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{D} = \widehat{A}\\ \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{DF}{AC}\end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{c}\widehat{E} = \widehat{B}\\ \widehat{F} = \widehat{C}\\ \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{DF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}\end{array}\right.$$

CAS PARTICULIERS.

1° *Deux triangles isocèles dont les angles principaux sont égaux sont semblables* (*fig. 121*).

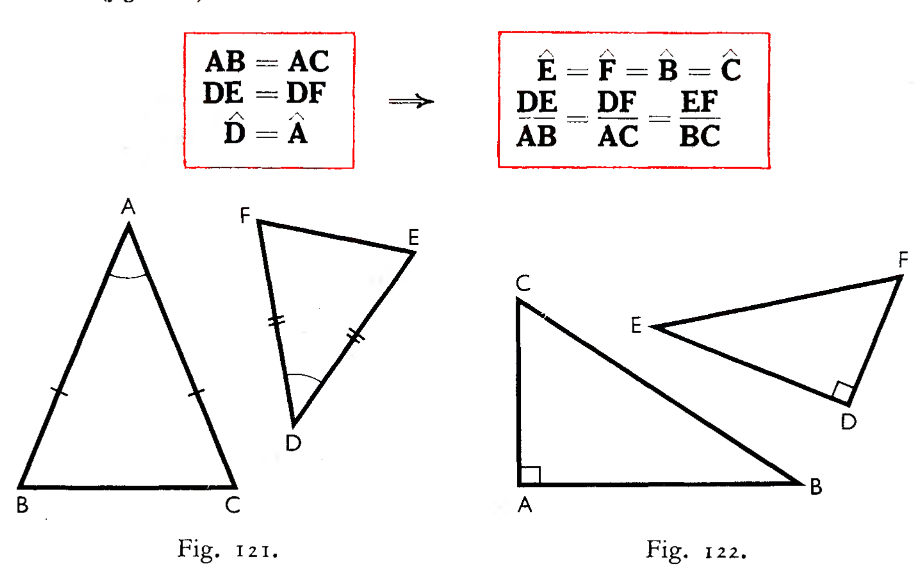


Fig. 121.

Fig. 122.

2° *Deux triangles rectangles tels que les côtés de l'angle droit de l'un soient proportionnels aux côtés de l'angle droit de l'autre sont semblables* (*fig. 122*).

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} = 1\text{ D} \\ \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{DF}{AC} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{E} = \hat{B} \\ \hat{F} = \hat{C} \\ \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{DF}{AC} = \dfrac{EF}{BC} \end{array}\right.$$

181. Troisième cas de similitude. — Construisons maintenant le triangle DEF tel que :

$$DE = AB'; \quad DF = AC'; \quad EF = B'C' \text{ (fig. 123)}.$$

Le triangle DEF est égal au triangle AB'C' (troisième cas d'égalité des triangles) et, par suite, le triangle DEF est semblable au triangle ABC.

Cherchons comment, en fait, nous avons déduit le triangle DEF du triangle ABC. Le choix *arbitraire* du rapport de similitude :

$$k = \frac{AB'}{AB}$$

nous a donné les côtés :

$$DE = k.AB$$
$$DF = k.AC$$
$$EF = k.BC$$

tels que :

$$(1) \qquad \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}.$$

Les égalités (1) assurent donc, seules, la similitude.

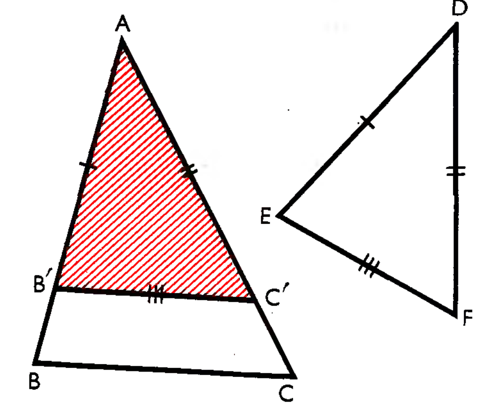
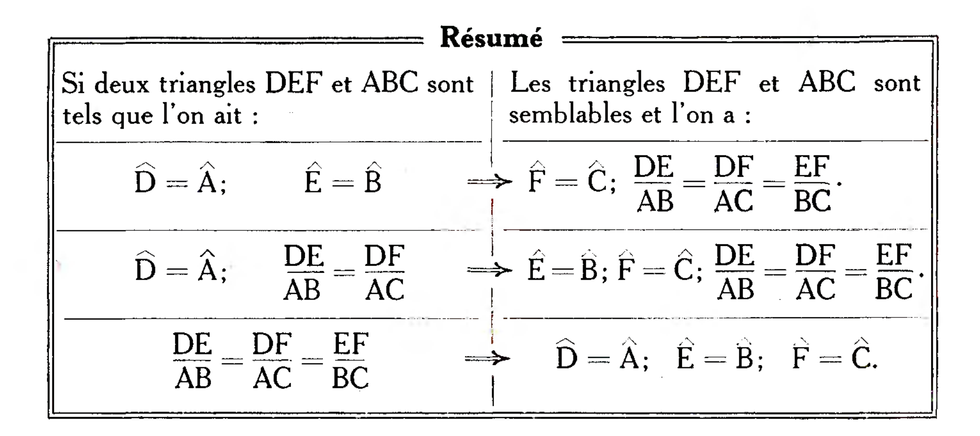


Fig. 123.

▪ THÉORÈME. ***(Troisième cas de similitude). — Deux triangles tels que les trois côtés de l'un soient proportionnels aux trois côtés de l'autre sont semblables.***

$$\boxed{\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\hat{D} = \hat{A}\\ \hat{E} = \hat{B}\\ \hat{F} = \hat{C}\end{array}}$$



Résumé

Si deux triangles DEF et ABC sont tels que l'on ait :	Les triangles DEF et ABC sont semblables et l'on a :
$\hat{D} = \hat{A}$; $\hat{E} = \hat{B}$ $\Longrightarrow$	$\hat{F} = \hat{C}$; $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$.
$\hat{D} = \hat{A}$; $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$ $\Longrightarrow$	$\hat{E} = \hat{B}$; $\hat{F} = \hat{C}$; $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$.
$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ $\Longrightarrow$	$\hat{D} = \hat{A}$; $\hat{E} = \hat{B}$; $\hat{F} = \hat{C}$.

EXEMPLES. I. *Soit un triangle* ABC *de côtés :*

$$AB = 28\ mm; \qquad BC = 36\ mm; \qquad AC = 42\ mm.$$

Par le milieu E *de* AB, *on trace une droite qui coupe le segment* AC *en* D *tel que l'on ait* $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$. *Calculer* AD *et* DE (*fig. 124*).

Les triangles ADE et ABC sont semblables. (Premier cas de similitude : $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$, angle commun; $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ (par hypothèse.)

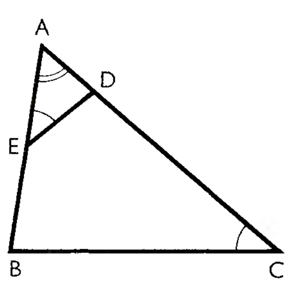


Fig. 124.

On a donc : $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$

et : $$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}.$$

Par suite : $$\frac{AD}{28} = \frac{DE}{36} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3};$$

d'où : $$AD = \frac{28}{3},$$

$$DE = \frac{36}{3} = 12.$$

II. *Dans un quadrilatère convexe* ABCD *les côtés et la diagonale* AC *ont pour mesures en mm :*

$$AB = 30; \qquad BC = 36; \qquad CD = 16; \qquad AD = 20; \qquad AC = 24.$$

1° *Construire ce quadrilatère.*

2° *Démontrer que les triangles* ABC *et* DAC *sont semblables. Indiquer les angles égaux.*

1° On peut construire les triangles ABC et ACD dont on connaît les trois côtés de chacun, puisque :

$$36 < 30 + 24$$

et $$24 < 20 + 16.$$

On place B et D de part et d'autre de AC.

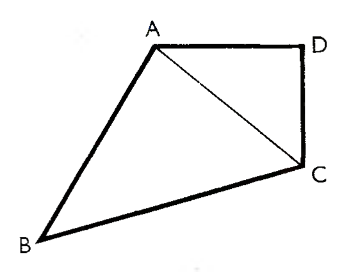


Fig. 125.

2° Les côtés du triangle ABC sont :

$$BC = 36; \qquad AB = 30; \qquad AC = 24.$$

Ceux du triangle DAC sont : $AC = 24; \quad AD = 20; \quad CD = 16.$

On vérifie que :

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD} = \frac{3}{2}.$$

Les deux triangles sont donc semblables (3e cas).

On en déduit les égalités d'angles :

$$\widehat{BAC} = \widehat{ADC}$$
$$\widehat{BCA} = \widehat{ACD}$$
$$\widehat{ABC} = \widehat{CAD}.$$

On remarque que CA est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$.

182. Cas de similitude des triangles rectangles. — De même qu'il existe des cas d'égalité particuliers pour les triangles rectangles, on peut envisager, outre les cas particuliers signalés au passage, un moyen spécial de réaliser l'égalité d'un triangle DEF à un triangle AB′C′, homothétique d'un triangle ABC, lorsque les angles $\widehat{E}$ et $\widehat{B}$ sont droits.

Construisons le triangle DEF tel que :

$$\widehat{E} = 1\text{ D};\quad DE = AB';\quad DF = AC' \ (\textit{fig. 126}).$$

Les triangles DEF et AB′C′, rectangles en E et B′ sont égaux (2e cas d'égalité des triangles rectangles) et, par suite, le triangle DEF est semblable au triangle ABC.

Cherchons comment, en fait, nous avons déduit le triangle DEF du triangle ABC. La connaissance du rapport de similitude :

$$k = \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

nous a donné les côtés :

$$DE = AB' = k.AB,\quad DF = AC' = k.AC,$$

tels que : $$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}.$$

Cette égalité assure, seule, la similitude.

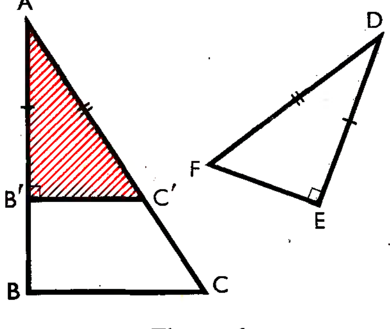


Fig. 126.

- THÉORÈME. — ***Deux triangles rectangles tels que l'hypoténuse et un côté de l'angle droit de l'un soient proportionnels à l'hypoténuse et à un côté de l'angle droit de l'autre sont semblables.***

183. Utilisation des cas de similitude. — Supposons qu'il s'agisse de démontrer une égalité du genre :

$$a \times b = c \times d \qquad (1)$$

entre les mesures a, b, c, d de quatre segments.

L'égalité (1) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{a}{c} = \frac{d}{b}. \qquad (2)$$

L'égalité (2) peut résulter soit de l'application du théorème de Thalès, s'il y a des parallèles sur la figure, soit de la découverte de deux triangles semblables dans lesquels les côtés ayant pour mesures a et d auraient respectivement pour homologues ceux qui ont pour mesures c et b.

On utilisera une méthode analogue pour démontrer l'égalité :

$$a^2 = bc$$

qui peut se mettre sous la forme : $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$.

EXEMPLE. *Un triangle isocèle* OAB *a pour base* AB. *Soit* H *le milieu du côté* AB. *On marque sur le côté* AO *un point* M *et, sur le côté* AC, *un point* N *tels que l'on ait* (*fig. 127*) :

$$4\,\mathrm{AM} \times \mathrm{BN} = \mathrm{AB}^2. \qquad (1)$$

1° *Démontrer que les triangles* AHM *et* BNH *sont semblables. Indiquer les angles égaux.*

2° *Démontrer que les triangles* AHM *et* HNM *sont semblables. Indiquer les angles égaux.*

3° *En déduire que le cercle de centre* H *et tangent aux droites* OA *et* OB *est tangent à la droite* MN.

1° On peut écrire (1) sous la forme :

$$\mathrm{AM} \times \mathrm{BN} = \frac{\mathrm{AB}^2}{4} = \mathrm{AH}^2 = \mathrm{AH} \times \mathrm{HB},$$

ou :

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BN}}. \qquad (2)$$

Les triangles AHM et BNH sont donc tels que :

$$\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} \quad \text{par hypothèse,}$$

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BN}}, \quad \text{égalité (2).}$$

Ils sont donc semblables (2[e] cas de similitude).

On en conclut :

$$\widehat{\mathrm{AHM}} = \widehat{\mathrm{BNH}} \text{ (opposés aux côtés homologues AM et BH),}$$

$$\widehat{\mathrm{AMH}} = \widehat{\mathrm{BHN}} \text{ (opposés aux côtés homologues AH et BN),}$$

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BN}} = \frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{HN}}. \qquad (3)$$

2° On a :

$$\widehat{\mathrm{MHN}} = \widehat{\mathrm{HAM}}, \qquad (4)$$

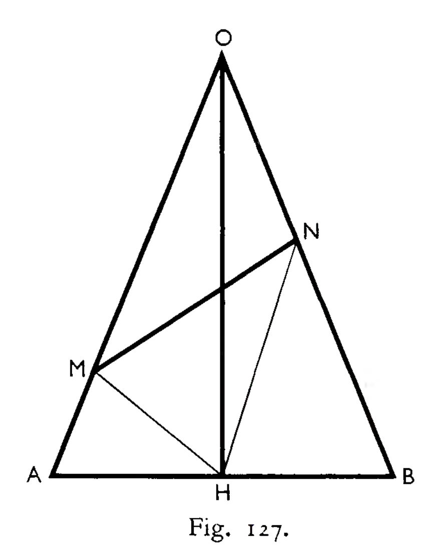


Fig. 127.

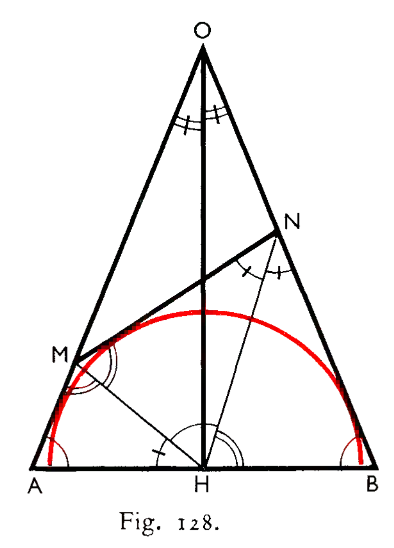


Fig. 128.

puisque ces angles ont le même supplément (*fig. 128*). Des égalités (3), on déduit la proportion :

$$\frac{AM}{BH} = \frac{HM}{HN}, \tag{5}$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{HM}{AM} = \frac{HN}{AH} \quad \text{puisque } AH = BH. \tag{6}$$

Les égalités (4) et (6) assurent la similitude des triangles AHM et HNM (2[e] cas de similitude).

On en conclut :

$\widehat{HMN} = \widehat{AMH}$ (opposés aux côtés homologues HN et AH);

$\widehat{HNM} = \widehat{AHM}$ (opposés aux côtés homologues HM et AM).

3° Le point H est alors le point commun à deux bissectrices extérieures MH et NH du triangle OMN et à la bissectrice intérieure OH. Le cercle de centre H et tangent à la droite OA est donc exinscrit à ce triangle et il est, en particulier, tangent aux droites OB et MN.

- Applications.

819. — *Un triangle a un angle de 72° et un angle de 43°. Un autre triangle a un angle de 72° et un angle de 65°. Ces deux triangles sont-ils semblables ?*

820. — *Dans deux triangles isocèles, les bases et les côtés égaux sont dans le même rapport. Ces triangles sont-ils semblables ?*

821. — *Un triangle rectangle a un angle de 43°. Un autre triangle rectangle a un angle de 47°. Sont-ils semblables ?*

822. — *On donne un triangle* ABC *et la perpendiculaire* xy *à* BC *en* B. *Le support de* AC *coupe* xy *en* E. *Le cercle de diamètre* AB *coupe* BE *en* F *et* BC *en* H.

1° *Quelle est la nature du quadrilatère* AFBH ?

2° *Démontrer que les triangles* AHC *et* EFA *sont semblables.*

(B. E. P. C.).

823. — *On donne trois points alignés* B, O, C *dans cet ordre, tels que* BO = 3 *cm et* OC = 4 *cm. Sur la perpendiculaire en* O *à la droite* BC, *on porte, d'un même côté de* BC, *les longueurs* OA = 6 *cm et* OD = 2 *cm. Démontrer que les triangles* OAC *et* OBD *sont semblables. En déduire que* BD *est perpendiculaire à* AC *et* CD *perpendiculaire à* AB.

(B. E. P. C.).

824. — *On trace la médiane* AD *d'un triangle* ABC. *Une parallèle à* AD *coupe la droite* AB *en* P, *la droite* AC *en* Q *et la parallèle à* BC *passant par* A *en* M.

1° *Démontrer que les triangles* AMP *et* BDA *sont semblables et en déduire l'égalité :*

$$\frac{MP}{AD} = \frac{AM}{BD}.$$

2° *Démontrer que les triangles* MQA *et* DAC *sont semblables et en déduire l'égalité :*

$$\frac{MQ}{AD} = \frac{AM}{CD}.$$

3° *En conclure que* M *est le milieu du segment* PQ.

825. — ABC *est un triangle dans lequel* AC > AB. *On trace une demi-droite, d'origine* B, *qui coupe le côté* AC *en* D, *de façon que* $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$. *Rechercher dans cette figure deux triangles semblables. En déduire :*

$$AB^2 = AC.AD.$$

826. — ABC *est un triangle rectangle en* A *dans lequel :*

$$AB = 40 \text{ mm} \quad \text{et} \quad AC = 30 \text{ mm}.$$

On trace le segment BB′ = 60 *mm, perpendiculaire à* AB *du côté de* AB *opposé à* C, *et le segment* CC′ = 20 *mm, perpendiculaire à* AC *du côté de* AC *opposé à* B. *Démontrer que les triangles* ABB′ *et* C′CA *sont semblables et que les points* C′, A, B′ *sont alignés.*

827. — ABC *et* A′B′C′ *sont deux triangles dont les côtés sont respectivement parallèles ou perpendiculaires.*

1° *Démontrer que l'on ne peut pas avoir :*

$$\widehat{A} + \widehat{A'} = \widehat{B} + \widehat{B'} = \widehat{C} + \widehat{C'} = 2\,\text{D}.$$

2° *Démontrer que l'on ne peut pas avoir :*

$$\widehat{A} + \widehat{A'} = \widehat{B} + \widehat{B'} = 2\,\text{D}; \quad \widehat{C} = \widehat{C'}.$$

3° *En déduire que les deux triangles sont semblables.*

III. PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE

Travaux pratiques d'initiation.

1° Tracer un cercle de rayon 5 cm et une corde AB de 8 cm. Soit M un point du segment AB. Quel est le signe du produit :

$$\overline{MA}.\overline{MB}\,?$$

2° Soit P un point du support de AB, à l'extérieur du segment AB. Quel est le signe du produit : $\overline{PA}.\overline{PB}$?

3° Réciproquement, soit N un point quelconque du support de AB. Peut-on dire, suivant le signe du produit $\overline{NA}.\overline{NB}$, si le point N est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle?

4° Tracer deux droites sécantes en un point M. Sur l'une, marquer deux points A et B, sur l'autre un point C tels que MA = 3 cm, MB = 5 cm, MC = 4 cm. Peut-on placer sur la deuxième droite un point D tel que :

$$MA \times MB = MC \times MD? \qquad (1)$$

Combien trouve-t-on de positions possibles pour D?
Traiter les mêmes questions si l'on veut que :

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}. \qquad (2)$$

184. Sécantes non parallèles d'un cercle. — Si les supports de deux sécantes AB et CD d'un cercle se coupent en un point M, la connaissance des points M, A, B, C permet de construire le point D d'une manière unique puisqu'il n'existe qu'un seul cercle circonscrit au triangle ABC. On peut donc se proposer de calculer MD, connaissant les mesures de MA, MB, MC.

Deux cas de figure sont possibles suivant que M est extérieur au cercle (*fig. 129*) ou intérieur au cercle (*fig. 130*).

On voit immédiatement que :

1° les angles $\widehat{MDA}$ et $\widehat{MBC}$ sont égaux (angles inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{AC}$);

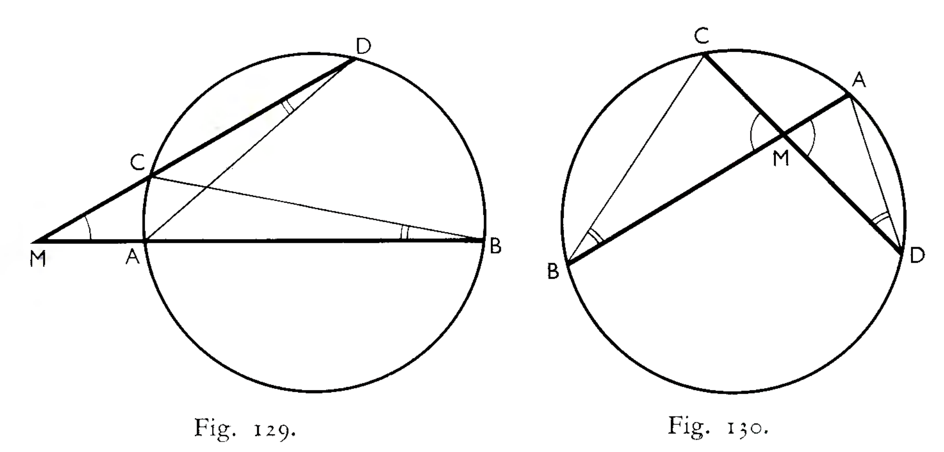


Fig. 129. Fig. 130.

2° les angles $\widehat{AMD}$ et $\widehat{BMC}$ sont égaux (confondus sur la *figure 129* et opposés par le sommet sur la *figure 130*).

Les triangles MDA et MBC sont donc semblables (1er cas de similitude) et l'on a :

$$\frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC},$$

d'où l'on déduit :

$$\mathbf{MA \times MB = MC \times MD} \qquad (1)$$

▪ THÉORÈME. — ***Si, par un point, on trace deux sécantes à un cercle, le produit des segments limités par ce point et par chacun des points d'intersection du cercle avec l'une des sécantes est égal au produit des segments analogues portés par l'autre sécante.***

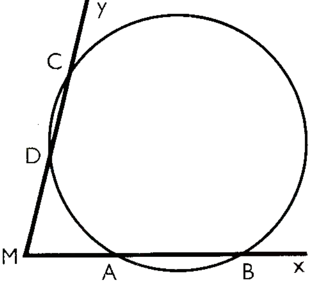


Fig. 131.

EXEMPLE. *Deux demi-droites* Mx *et* My *se coupent en* M. *On prend sur* Mx *deux segments consécutifs* MA = 12 *mm et* AB = 16 *mm. Sur* My, *on prend le segment* MC = 24 *mm. Le cercle circonscrit au triangle* ABC *recoupe* My *en* D. *Calculer* MD (*fig. 131*).

On a : $MA \times MB = MC \times MD;$

or : $MB = MA + AB = 28$ mm;

d'où : $12 \times 28 = 24 \times MD,$

et : $MD = 14$ mm.

185. Puissance d'un point par rapport à un cercle. — Lorsque le point M est extérieur au cercle, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont de même sens; les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MD}$ sont aussi de même sens. La relation arithmétique (1) peut s'écrire sous forme algébrique :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD} \qquad (2)$$

le sens positif pris sur chaque sécante étant arbitraire.

Lorsque le point M est intérieur au cercle, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont de sens contraires, ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MD}$. On peut encore écrire l'égalité algébrique (2) dans laquelle les deux membres sont négatifs.

Dès lors, si on laisse la sécante MCD fixe et si l'autre pivote autour de M, le produit :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB}$$

demeure constant.

▪ THÉORÈME. — ***Si, par un point, on trace une sécante à un cercle, le produit des mesures algébriques des vecteurs ayant pour origine ce point et pour extrémités chacun des points d'intersection du cercle avec la sécante est constant lorsque la sécante pivote autour du point.***

La valeur de ce produit est la *puissance du point par rapport au cercle.*

186. Calcul de la puissance d'un point par rapport à un cercle. — Soit un point M situé à la distance OM = d du centre O d'un cercle (C) de rayon R (*fig. 132*). Prenons comme sécante particulière la droite OM qui coupe le cercle en A et en B. La puissance p de M par rapport à (C) est :

$$p = \overline{MA} . \overline{MB}.$$

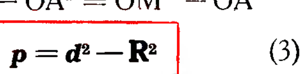
Or on a, d'après la formule de Chasles :

$$\overline{MA} = \overline{MO} + \overline{OA},$$
$$\overline{MB} = \overline{MO} + \overline{OB} = \overline{MO} - \overline{OA},$$

donc :

$$p = (\overline{MO} + \overline{OA})(\overline{MO} - \overline{OA})$$
$$= \overline{MO}^2 - \overline{OA}^2 = OM^2 - OA^2$$

et, par suite :



$$p = d^2 - R^2 \qquad (3)$$

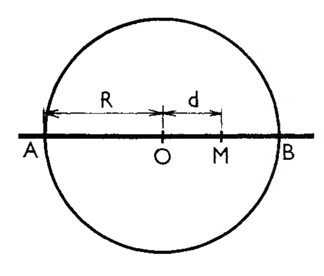


Fig 132.

• Remarques. — I. D'après (3), on a les équivalences logiques :

$p > 0 \iff d > R$, le point M est à l'extérieur du cercle;

$p < 0 \iff d < R$, le point M est à l'intérieur du cercle.

II. La formule (3) montre que $p = 0 \iff d = R$; le point M est sur le cercle. Dans ce cas, en effet, l'un des segments, MA par exemple, est nul.

III. Si M est en O, la droite MO n'est pas déterminée. Toute droite passant par M est un diamètre qui coupe le cercle en A et B et l'on a (*fig. 133*) :

$$\overline{MA} = -\overline{MB},$$

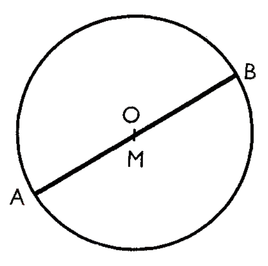


Fig. 133.

donc : $\overline{MA}.\overline{MB} = -\overline{MA}^2 = -R^2.$

Le formule (3) est donc générale.

187. Réciproque. — Soit deux droites qui se coupent en un point M; marquons sur l'une des droites les points A et B et sur l'autre des points C et D tels que :

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD} \qquad (4)$$

les points A, B, C, D étant distincts et distincts de M.

Les points A, B, C ne sont pas alignés; il passe donc un cercle par ces points et ce cercle coupe la droite MC en D' (*fig. 134*).

On a, d'après le théorème direct :

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD'}. \quad (5)$$

En comparant (4) et (5) on déduit :

$$\overline{MC}.\overline{MD} = \overline{MC}.\overline{MD'},$$

ou :

$$\overline{MC}\,(\overline{MD} - \overline{MD'}) = 0,$$

soit : $\overline{MC}.\overline{D'D} = 0.$

Comme $\overline{MC}$ n'est pas nul, on en conclut :

$$\overline{D'D} = 0;$$

les points D et D' sont confondus et les points A, B, C, D sont sur un même cercle.

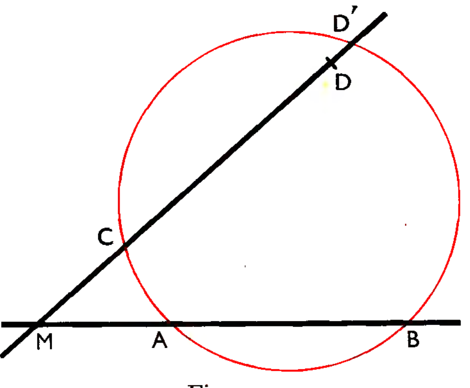


Fig. 134.

▪ THÉORÈME. — ***Si les supports de deux segments AB et CD se coupent en un point M (distinct de A, B, C et D) et si :***

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD},$$

les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle.

188. Cas où une droite est tangente. — Nous avons supposé que les droites passant par M étaient toutes deux sécantes. Supposons maintenant que l'une d'elles soit tangente (*fig. 135*).

Soit donc une droite, passant par M, et coupant un cercle en A et B et une autre droite, passant par M et tangente au cercle en C. Le point M est naturellement à l'extérieur du cercle.

On a :

$$\widehat{AMC} = \widehat{CMB}$$

(angles confondus),

$$\widehat{MCA} = \widehat{MBC}$$

(angles inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{AC}$).

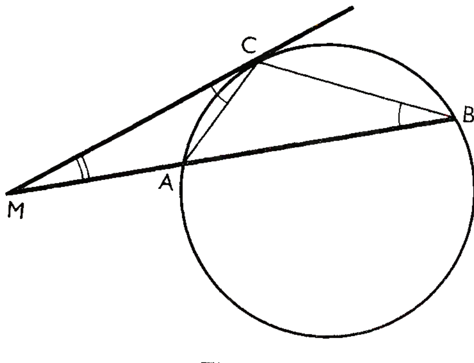


Fig. 135.

Les triangles MCA et MBC sont donc semblables (1er cas de similitude) et il en résulte :

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MC},$$

ou :

$$\boxed{\mathbf{MC^2 = MA \times MB}} \qquad (6)$$

Nous savons que la relation (6) exprime que le segment MC est moyenne proportionnelle (ou moyenne géométrique) entre les segments MA et MB.

Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont de même sens, nous pouvons alors donner à la relation (6) une forme algébrique et écrire :

$$\boxed{\mathbf{MC^2 = \overline{MA} . \overline{MB}}} \qquad (7)$$

▪ THÉORÈME. — ***Quand un point est extérieur à un cercle, sa puissance par rapport au cercle est égale au carré de la mesure du segment de tangente compris entre ce point et le point de contact.***

• REMARQUE. Si de M, on trace les tangentes au cercle et si on désigne par C et C_1 les points de contact, on retrouve la propriété connue :

$$MC = MC_1.$$

Réciproquement, soit deux droites (D) et (D′) qui se coupent en M; sur (D) marquons les points A et B et sur (D′) le point C, distinct de M, tels que :

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}^2. \qquad (7)$$

De (7) il résulte que M est extérieur au segment AB.

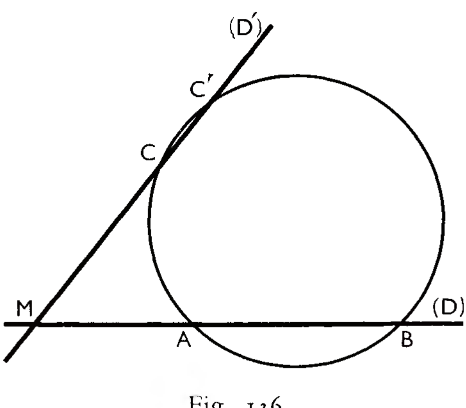


Fig. 136.

Le cercle circonscrit au triangle ABC coupe (D′) en C et en C′ et l'on a (n° 185) :

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MC'}. \qquad (8)$$

En comparant (7) et (8), on déduit :

$$\overline{MC}^2 = \overline{MC}.\overline{MC'},$$

ou : $\overline{MC}\,(\overline{MC} - \overline{MC'}) = 0,$

soit : $\overline{MC}.\overline{C'C} = 0.$

Comme $\overline{MC}$ n'est pas nul, il en résulte que :

$$\overline{C'C} = 0;$$

les points C et C′ sont confondus. La droite (D′) n'a pas d'autre point commun avec le cercle que le point C. Elle est donc tangente à ce cercle en C.

▪ RÉCIPROQUE. — ***Si trois points alignés M, A, B et un point C, non aligné avec eux, sont tels que :***

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}^2$$

le cercle circonscrit au triangle ABC est tangent en C à la droite MC.

• Applications.

828. — *On suppose que la puissance d'un point par rapport à un cercle est égale au carré du diamètre. Quelle est la distance de ce point au centre du cercle ?*

829. — *Quelle est la plus petite valeur que peut prendre la puissance d'un point par rapport à un cercle de rayon* R? (¶ Ne pas oublier que la puissance peut être négative.)

830. — *Soit un cercle* (O) *de centre* O *et de rayon* R *et un cercle* (O′) *qui coupe le cercle* (O) *en deux points* A *et* B *diamétralement opposés sur* (O). *Déterminer en fonction de* R *la puissance du point* O *par rapport au cercle* (O′).

831. — *Tracer un cercle de centre* O *et de rayon* 2 *cm. Soit* A *un point situé à la distance* 5 *cm du centre. Par ce point, on trace une tangente au cercle dont le point de contact est* T. *Calculer la longueur du segment* AT.

832. — *Calculer le rayon d'un cercle sachant que les segments limités par un point* A, *situé à* 5 *cm du centre, et par les points de contact des tangentes passant par* A *ont* 3 *cm de longueur.*

833. — *Par un point* M, *extérieur à un cercle* (C) *de centre* O *et de rayon* R, *on trace une sécante qui coupe le cercle en* A *et* B *et une deuxième sécante qui coupe le cercle en* C *et* D *et enfin une tangente* ME.

1° *On donne* MA = 48 *mm,* AB = 60 *mm,* MC = 64 *mm; calculer* MD *et* ME.

2° *On trace la droite* MO *qui coupe le cercle en* F *et* G. *Calculer* MO, MF *et* MG *connaissant en outre* R = 30 *mm.*

834. — *Sur la tangente en un point* E *à un cercle* (O) *de centre* O, *de rayon* R, *on place un point* P *tel que* OP = 2 R. *La droite* PO *coupe le cercle* (O) *en* C *et* D.
Calculer le produit PC.PD *et la longueur du segment* PE.

(B. E. P. C.).

EXERCICES ET PROBLÈMES

★

Problème résolu. — Soit un cercle (C) de centre O et une droite (D). Le diamètre perpendiculaire à (D) coupe (D) en H et le cercle en A et B. Une droite (X) variable passant par H coupe (C) en M et N. Les droites AM et AN coupent la droite (D) respectivement en M′ et N′.

1° Démontrer que :

$$\overline{AB}.\overline{AH} = \overline{AM}.\overline{AM'} = \overline{AN}.\overline{AN'}. \qquad (1)$$

En déduire la relation :

$$\overline{HM'}.\overline{HN'} = \overline{HB}.\overline{HA}. \qquad (2)$$

2° Démontrer que le cercle circonscrit au triangle AM′N′ passe par un point fixe (autre que A) quand (X) varie.

SOLUTION.

1° *Le quadrilatère* HBMM′ *(convexe ou croisé) est inscriptible puisque les angles en* H *et* M *sont droits. En évaluant la puissance de* A *par rapport au cercle circonscrit à ce quadrilatère, on obtient la relation (fig. 137, I et II) :*

$$\overline{AM}.\overline{AM'} = \overline{AB}.\overline{AH}.$$

En raisonnant de la même façon pour le quadrilatère HBNN′ *on obtient :*

$$\overline{AN}.\overline{AN'} = \overline{AB}.\overline{AH}.$$

Les relations (1) *sont donc établies.*

On en déduit :

$$\overline{AM}.\overline{AM'} = \overline{AN}.\overline{AN'}$$

et, par suite, le quadrilatère MM'N'N *est inscriptible. On a donc :*

$$\overline{HM'}.\overline{HN'} = \overline{HM}.\overline{HN}$$

en évaluant de deux façons la puissance de H *par rapport au cercle circonscrit à ce quadrilatère* MM'N'N.

Mais on a : $\overline{HM}.\overline{HN} = \overline{HB}.\overline{HA}$

(*en exprimant la puissance de* H *par rapport à* (C).

Par conséquent, on a : $\overline{HM'}.\overline{HN'} = \overline{HB}.\overline{HA}.$ (2)

2° *Cette égalité* (2) *montre que les quatre points* M', N', B, A *sont sur un même cercle. Le cercle circonscrit au triangle* AM'N' *passe donc par* B.

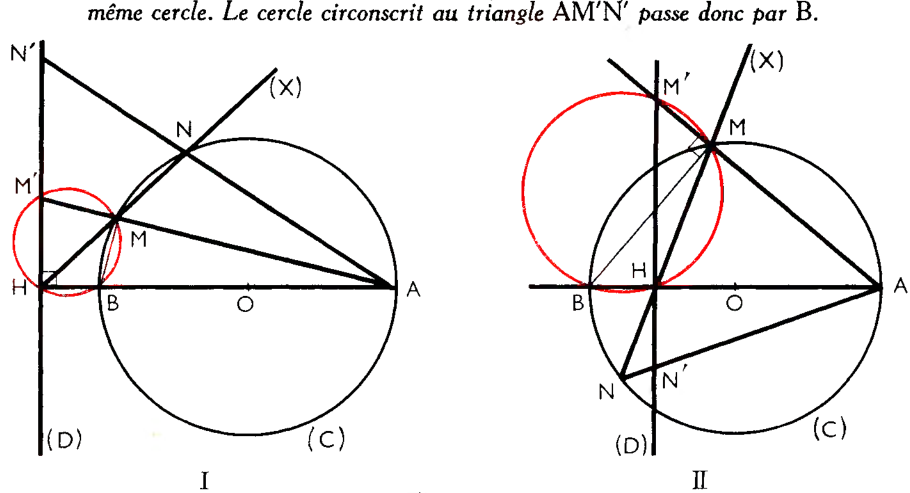


Fig. 137.

835. — 1° Sur le côté Ax d'un angle $\widehat{xAy}$, on porte les segments consécutifs AB = 28 mm, BC = 44 mm; sur le côté Ay, on porte les segments consécutifs AD = 21 mm, DE = 75 mm. Les triangles ABD et ACE sont-ils semblables? Sachant que BD = 35 mm, calculer CE.

2° Quels sont les angles égaux de cette figure?

836. — Lorsque deux triangles sont semblables, les médianes relatives à deux côtés homologues sont appelées médianes homologues. Démontrer que le rapport de deux médianes homologues de deux triangles semblables est égal au rapport de similitude.

837. — 1° Construire un triangle ABC tel que :

AB = 60 mm, AC = 40 mm, BC = 45 mm.

2° On marque sur le segment AB le point D tel que AD = 16 mm et sur le segment AC le point E tel que AE = 24 mm. Démontrer que les triangles ADE et ACB sont semblables. Calculer DE.

3° La droite DE coupe le support de BC en F. Comparer les triangles DFB et CFE. Calculer EF et FC.

838. — Soit un triangle ABC. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le côté BC en D et le cercle circonscrit au triangle en M.

1° Démontrer que M est le milieu de l'arc $\widehat{BMC}$.

2° On trace le segment de droite MC. Montrer qu'il existe sur la figure deux triangles semblables au triangle DMC. Établir la relation

$$MC^2 = \overline{MD} \cdot \overline{MA}.$$

(B. E. P. C.)

839. — Soit un triangle ABC. On trace la hauteur AH et le diamètre AA_1 du cercle circonscrit au triangle. Démontrer la similitude des triangles ABA_1 et AHC. En déduire la relation : $AB \times AC = AH \times AA_1$.

Énoncer ce résultat sous forme d'un théorème.

(¶ *Faire deux figures suivant que l'angle* C *est aigu ou obtus.*)

840. — 1° Soit un cercle de diamètre AB et M le point défini par $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\dfrac{3}{5}$. Exprimer la puissance, par rapport au cercle, du point M en fonction du rayon R du cercle.

2° Même problème pour le point M′ tel que $\dfrac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = \dfrac{3}{5}$.

841. — On donne un cercle (O), une corde AB, de milieu I, et un point M de ce cercle.

1° Construire le cercle passant par A et M et tangent en A à AB. La droite IM coupe ce cercle en C et M. Établir une relation entre les longueurs des segments IA, IC, IM.

2° Comparer les triangles IBC, IMB. (¶ *Remarquer que l'on peut remplacer* IA *par* IB *dans la relation trouvée au* 1°.)

(B. E. P. C.)

842. — 1° Deux cercles sont sécants en A et B. Montrer que tout point de la droite AB a même puissance par rapport aux deux cercles.

2° Deux cercles sont tangents en A. Montrer que tout point de la tangente commune en A a même puissance par rapport aux deux cercles.

843. — Soit (O) et (O′) deux cercles sécants en A et B et (O″) un cercle dont le centre n'est pas aligné avec ceux des cercles (O) et (O′) et qui coupe le cercle (O′) en C et D. La droite CD coupe la droite AB en I. Montrer que le point I a même puissance par rapport aux trois cercles (O), (O′) et (O″).

844. — Soit A, B, C trois points fixes alignés dans cet ordre. On désigne par (O) un cercle variable qui passe par A et B. Par C on trace les tangentes à (O), dont les points de contact sont M et N.

1° Montrer que la longueur des segments CM et CN ne varie pas lorsque le cercle (O) varie.

2° En déduire que les points M et N se déplacent sur un cercle dont on précisera le centre et dont on calculera le rayon en fonction des longueurs a et b des segments respectifs AB et AC.

845. — Dans un triangle ABC on trace la hauteur AH et la médiane AM. Les cercles circonscrits aux triangles ABC et AHM se coupent en A et en D. La droite AD coupe en E le support de BC.

1° Montrer que : $\overline{EH}\,.\,\overline{EM} = \overline{EB}\,.\,\overline{EC}$.

2° En déduire la relation : $\overline{MH}\,.\,\overline{ME} = \overline{MB}^2$.

846. — Deux cercles se coupent en A et B. On prend un point M sur un prolongement de la corde AB.

1° De M, on trace une tangente à chaque cercle. Comparer les segments limités par M et les points de contact.

2° De M, on trace à l'un des cercles la sécante MNP et à l'autre la sécante MN'P'. Que peut-on dire des quatre points N, P, N', P' ?

847. — Deux cercles sont tangents en A. On trace dans l'un la corde AM et, dans l'autre, la corde AN perpendiculaire à AM. Démontrer que la droite MN passe par un point fixe quand la droite AM varie en pivotant autour de A. (¶ *Joindre* N *au point* B *diamétralement opposé à* A *sur le cercle qui contient* N.)

★ ★

848. — Construire un triangle connaissant :

1° les angles et une médiane (¶ *On commencera par construire un triangle semblable au triangle cherché*);

2° les angles et une hauteur;

3° les angles et une bissectrice;

4° les angles et la différence de deux côtés.

849. — Construire un triangle :

1° connaissant l'angle $\widehat{A}$, le rapport $\dfrac{AB}{AC}$ et la médiane BM;

2° sachant qu'il est isocèle et de base BC et connaissant l'angle $\widehat{A}$ ainsi que la somme de la base et de la hauteur principale.

850. — Étant donné un triangle ABC, on porte sur la bissectrice intérieure de l'angle A un segment AM tel que :

$$AM^2 = AB.AC.$$

1° Démontrer que les triangles AMC et AMB sont semblables.

2° Quelle est la tangente en M au cercle circonscrit au triangle AMB ?

3° Quelle est la tangente en M au cercle circonscrit au triangle AMC ?

851. — On trace un segment AB et deux demi-droites A*x* et B*y*, parallèles et de même sens, perpendiculaires à AB. On prend sur A*x* un point M, sur B*y* un point M' et sur AB un point P tels que l'on ait :

$$AM \times BM' = PA \times PB.$$

1° Démontrer que les triangles rectangles MAP et PBM' sont semblables. En déduire que le triangle MPM' est rectangle.

2° On projette P en H sur MM'. Démontrer que le triangle AHB est rectangle.

852. — Deux cercles (C) et (C′) de centres respectifs O et O′ se coupent en A et B.

1° Une droite (X) passant par B coupe les cercles (C) et (C′) respectivement en M et M′. Démontrer que les triangles AMM′ et AOO′ sont semblables.

2° Comment faut-il choisir (X) pour que le périmètre du triangle AMM′ soit le plus grand possible?

3° On trace par B une deuxième droite (Y) qui coupe (C) en N et (C′) en N′, puis une troisième droite (Z) qui coupe (C) en P et (C′) en P′. Démontrer que les triangles MNP et M′N′P′ sont semblables.

853. — Soit (C) le cercle de centre O et de rayon $R = 5$ cm et (C′) le cercle de centre O′ et de rayon $R' = 3$ cm ($OO' = 10$ cm).

1° La droite qui passe par les extrémités M et M′ de deux rayons OM et O′M′, parallèles et de même sens, coupe la droite OO′ en I. Calculer OI et O′I.

2° La droite qui passe par les extrémités N et N′ de deux rayons ON et O′N′ parallèles et de sens contraires, coupe la droite OO′ en J. Calculer OJ et O′J.

854. — Deux cercles (C) et (C′) se coupent en A et B. On trace la tangente en B à (C), elle recoupe (C′) en M; on trace la tangente en B à (C′), elle recoupe (C) en M′.

1° Démontrer que les triangles ABM′ et AMB sont semblables.

2° Qu'en déduit-on pour les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{BAM'}$?

3° Démontrer la relation : $AB^2 = AM \times AM'$.

855. — Soit un triangle isocèle CAB de base AB. Une droite passant par C coupe le support de AB en M et le cercle circonscrit en K.

1° Démontrer que les triangles CAK et CMA sont semblables. (¶ *Considérer deux cas de figure suivant que* M *est ou n'est pas sur le segment* AB.)

2° En déduire la relation :

$$CB^2 = \overline{CK} \cdot \overline{CM}.$$

856. — Un cercle de centre O a pour rayon R.

Sur une demi-droite fixe Ox, on porte les segments $OA = \frac{2R}{3}$ et $OB = \frac{3R}{2}$.

Soit CD un diamètre variable du cercle O. Les droites AC et BD se coupent en P et la parallèle à CD tracée par P coupe Ox en I. Soit K le point de rencontre avec CD de la parallèle à Ox tracée par P.

1° Démontrer que : $\frac{AI}{AO} = \frac{OK}{OC}$ et que : $\frac{BI}{BO} = \frac{OK}{OC}$.

2° Calculer en fonction de R la longueur des segments AI, IB, OI, IP.

(Admission aux E. N.)

857. — Soit deux droites perpendiculaires $x'Ox$ et $y'Oy$. On prend sur $x'Ox$, de part et d'autre de O, les points A et B tels que :

$$OA = 4 \text{ cm}; \quad OB = 2 \text{ cm}.$$

On prend un point M sur la médiatrice de AB; MA coupe $y'Oy$ en C et MB coupe $y'Oy$ en D. On appelle E le milieu de CA et F le milieu de DB.

1° Quelle est la nature des triangles MAB, BFO, OEA? Démontrer qu'ils sont semblables et donner la valeur des rapports de similitude.

2° Démontrer que le quadrilatère EOFM est un parallélogramme.

3° EF coupe Ox en P. Évaluer le rapport $\frac{PO}{PA}$. Calculer PO.

4° On prend M de façon que HM = 3 cm. (H, milieu de AB). Quelle est alors la nature du quadrilatère OFME?

858. — Soit A, M, B trois points alignés, M étant situé entre A et B. AM = 4 cm et MB = 3 cm.

Un angle droit $\widehat{CMD}$, de sommet M, coupe en C la perpendiculaire à AB en A et en D la perpendiculaire à AB en B.

1° Démontrer que les triangles AMC, BMD sont semblables.

2° On suppose en outre AC = 2 cm; préciser le rapport de similitude du triangle AMC au triangle BMD et calculer BD.

N étant le point d'intersection de la droite CD avec la droite AB, calculer AN et BN. (¶ *On connaît la différence de ces segments et on peut déterminer leur rapport en utilisant des triangles semblables.*)

(B. E. P. C.)

859. — On donne un segment AB de longueur a et deux demi-droites Ax et By perpendiculaires à AB d'un même côté de AB. Sur Ax on prend un point P, sur By un point Q tels que AP = 2 BQ.

1° PQ coupe AB en S; calculer AS en fonction de a.

2° BP et AQ se coupent en M. Comparer les triangles MAP et MQB. Démontrer que :

$$MA.MB = MP.MQ.$$

3° Calculer les rapports $\frac{MA}{MQ}$ et $\frac{MP}{MB}$, puis les rapports $\frac{AM}{AQ}$ et $\frac{PM}{PB}$.

4° La perpendiculaire à AB passant par M coupe AB en H et PQ en K. Calculer AH.

5° Calculer les rapports $\frac{HM}{BQ}$ et $\frac{MK}{BQ}$. En déduire la position de M sur le segment HK.

(B. E. P. C.)

★ ★ ★

860. — On désigne par M, N, P les milieux respectifs des côtés BC, AC, AB d'un triangle ABC.

1° On prolonge le segment PN d'un segment ND = PN. Comparer les côtés du triangle AMD aux médianes du triangle ABC.

2° En conclure que si l'on construit un triangle A'B'C' ayant pour côtés les longueurs des médianes AM, BN, CP, puis le triangle A"B"C" ayant pour côtés les longueurs des médianes du triangle A'B'C', les deux triangles ABC et A"B"C" sont semblables. Calculer le rapport de similitude.

861. — Dans un triangle quelconque ABC, H est l'orthocentre, O le centre du cercle circonscrit, D le milieu de BC et E le milieu de AC, G le point de concours des médianes.

1° Démontrer que les triangles ABH et DOE sont semblables et que AH est le double de OD.

2° Démontrer que les triangles AHG et DOG sont semblables.

3° Démontrer que les points H, G et O sont alignés. Déterminer le rapport des segments GH et GO.

862. — Soit un segment AB de longueur l et les points M et M′ définis par les relations :

$$\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = -\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{4}{3}.$$

1° Calculer, en fonction de l, la longueur du segment MM′.

2° On trace les cercles de diamètre AB et MM′. Démontrer que la puissance du centre de l'un par rapport à l'autre est égale au carré du rayon du premier cercle.

863. — **Propriétés des hauteurs d'un triangle.** — Soit un triangle ABC et ses hauteurs AA′, BB′, CC′ qui se coupent en H.

1° Démontrer que les quatre points ABA′B′ sont sur un même cercle et en déduire les relations :

$$\overline{CA}\,\overline{CB'} = \overline{CB}\cdot\overline{CA'}; \qquad (1)$$

$$\overline{HA}\cdot\overline{HA'} = \overline{HB}\cdot\overline{HB'} = \overline{HC}\cdot\overline{HC'}. \qquad (2)$$

2° Démontrer que les triangles BHA′ et ACA′ sont semblables et établir la relation :

$$\overline{A'H}\cdot\overline{A'A} = -\overline{A'B}\cdot\overline{A'C}. \qquad (3)$$

3° La droite AA′ coupe le cercle circonscrit au triangle en D. Établir la relation :

$$\overline{A'B}\cdot\overline{A'C} = \overline{A'D}\cdot\overline{A'A}. \qquad (4)$$

En comparant (3) et (4) qu'en déduit-on pour les points H, A′ et D ? Énoncer le résultat.

863 bis. — **Propriétés des bissectrices intérieures d'un triangle.** — Soit un triangle ABC, la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ coupe BC en I. On trace par C la parallèle à AI jusqu'en E sur AB.

1° Démontrer que l'on a : $\quad AC = AE;$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC}.$$

En posant $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, calculer IB et IC.

2° La droite AI coupe le cercle circonscrit en D. Démontrer la relation :

$$IB \times IC = IA \times ID.$$

3° Démontrer que les triangles ABD et AIC sont semblables et que :

$$AB \times AC = AD \times AI.$$

En déduire : $\quad AB \times AC = AI^2 + IB \times IC.$

Calculer AI^2 en fonction de a, b, c.

Application numérique : $a = 12$ cm; $b = 10$ cm; $c = 14$ cm. Calculer AI à 1 mm près.

CHAPITRE XII

PROJECTIONS ORTHOGONALES

I. RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

Travaux pratiques d'initiation.

1° Construire un triangle ABC rectangle en A dans lequel :

$$AB = 6 \text{ cm} \qquad \text{et} \qquad AC = 8 \text{ cm}.$$

2° Tracer la hauteur AH, puis découper trois triangles en papier de trois couleurs différentes : l'un égal au triangle ABC, le deuxième égal au triangle ABH et le troisième égal au triangle ACH.

3° Indiquer les angles égaux et en déduire une conséquence pour les triangles ABC, ABH, ACH.

4° Revenant au triangle ABC du 1°, tracer le cercle de diamètre AC. Où coupe-t-il le côté BC? Quelle est la tangente à ce cercle en A? Évaluer de deux façons différentes la puissance de B par rapport à ce cercle et en conclure l'égalité :

$$AB^2 = BC \times ....$$

189. Projections orthogonales sur une droite. — Soit (D) une droite.

1° **Projection d'un point.** Nous rappelons que l'on appelle *projection orthogonale* (ou simplement : projection) d'un point A sur la droite (D), l'intersection A′ de (D) et de la perpendiculaire (Δ) à (D), passant par A.

On dit aussi que A′ est le *pied* de la perpendiculaire (Δ) à (D) passant par A (*fig. 138*).

La droite (Δ) s'appelle la *projetante* de A.

Il est évident que tout point de (D) est confondu avec sa projection et que, si on se donne la projection A′ de A, le point A peut être choisi arbitrairement sur la perpendiculaire à (D) en A′.

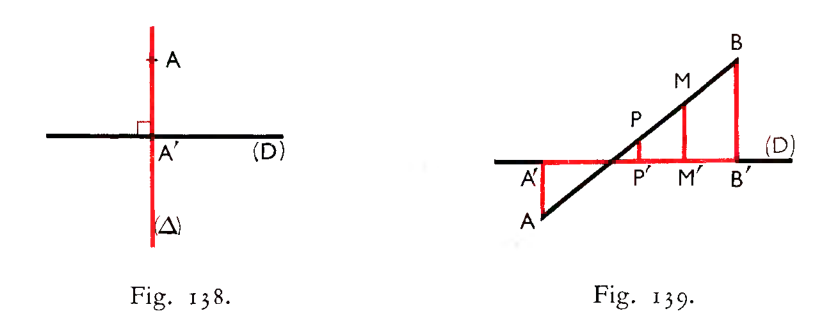


Fig. 138. Fig. 139.

2° **Projection d'un segment.** Soit une droite (D) et un segment AB. Le point A se projette sur (D) en A′ et le point B en B′. Le segment A′B′ est appelé la projection orthogonale du segment AB sur (D) (*fig. 139*).

☆ DÉFINITION. — ***La projection orthogonale d'un segment AB sur une droite (D) est le segment A′B′ dont les extrémités sont les projections respectives sur (D) des points A et B.***

Tout point M du segment AB se projette sur (D) en un point M′ du segment A′B′. *Réciproquement*, si le support de AB n'est pas perpendiculaire à (D), tout point M′ du segment A′B′ est la projection d'un point M du segment AB. En particulier, les milieux P et P′ respectifs des segments AB et A′B′ sont sur la même projetante.

• REMARQUES. I. On sous-entend souvent le mot « orthogonale ». Nous dirons que A′ est la projection de A sur (D) et que A′B′ est la projection du segment AB.

II. Si le support de AB est perpendiculaire à (D), la projection du segment AB est un point (*fig. 140*). On dit aussi que cette projection est nulle : on entend par là que, dans ce cas, la mesure du segment A′B′ est nulle. Les points A′ et B′, confondus, sont alors les projections de tous les points de la droite AB.

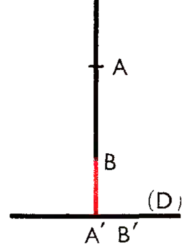


Fig. 140.

III. Si l'une des extrémités, A par exemple, est sur (D), la projection du segment AB est le segment AB′.

190. Application de la similitude à l'étude du triangle rectangle. — Soit ABC un triangle rectangle en A et AH la hauteur issue de A. Nous dirons couramment que le segment AH est la *hauteur du triangle rectangle*, nous sous-entendrons toujours qu'il s'agit de la hauteur relative à l'hypoténuse; les deux autres hauteurs sont confondues avec les côtés de l'angle droit.

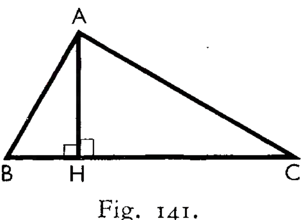
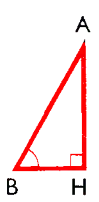


Fig. 141.

Le triangle ABC est alors décomposé en deux triangles rectangles AHB et CHA, car, les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ étant aigus, le pied H de la hauteur est situé entre B et C (*fig. 141*).

1° Les triangles rectangles ABC et HBA ont en commun l'angle aigu $\hat{B}$ (*fig. 142*). Ils sont donc semblables (1[er] cas de similitude). On en conclut, en particulier, que : $\widehat{HAB} = \hat{C}$.



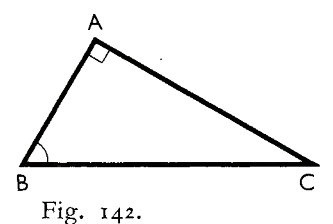
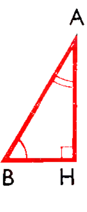


Fig. 142.



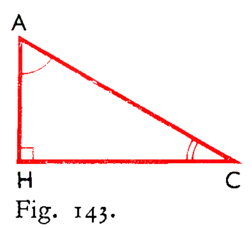
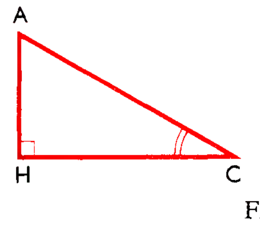


Fig. 143.

2° Les triangles rectangles ABC et HAC ont l'angle aigu $\hat{C}$ en commun (*fig. 144*). Ils sont donc semblables (1[er] cas). On en conclut, en particulier, que l'on a : $\widehat{HAC} = \hat{B}$.

3° Par suite les triangles rectangles HBA et HAC ont leurs angles respectivement égaux (*fig. 143*). Ils sont donc semblables (1[er] cas).



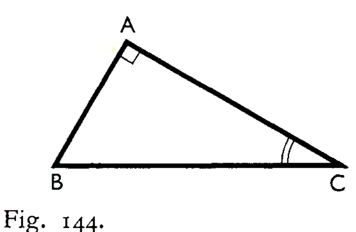


Fig. 144.

Nous énoncerons :

▪ THÉORÈME. — ***La hauteur relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle partage ce triangle en deux triangles rectangles qui sont semblables entre eux et semblables au premier.***

Nous dirons « triangles partiels » pour désigner les triangles HBA et HAC, « triangle total » pour désigner le triangle ABC.

191. Similitude d'un triangle partiel et du triangle total. — Les triangles HBA et ABC étant semblables, leurs côtés homologues sont proportionnels :

$$\boxed{\frac{\mathbf{HB}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{BA}}{\mathbf{BC}}} = \frac{\mathbf{HA}}{\mathbf{AC}}. \qquad (1)$$

1° Nous n'utiliserons, d'abord, que l'égalité des deux premiers rapports c'est-à-dire la proportion $\frac{HB}{AB} = \frac{AB}{BC}$, d'où nous déduisons :

$$\boxed{\mathbf{AB^2 = BC \times HB}} \qquad (2)$$

En utilisant la similitude des triangles HAC et ABC, nous aurions trouvé :

$$\frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC},$$

d'où nous aurions déduit :

$$\boxed{\mathbf{AC^2 = BC \times HC}} \qquad (3)$$

Notons que HB et HC sont respectivement les projections des côtés AB et AC sur le support de l'hypoténuse.

Nous énoncerons, d'après (2) et (3) :

- THÉORÈME. — ***Chaque côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est moyenne géométrique entre l'hypoténuse et sa projection sur l'hypoténuse.***

2° Reprenons les égalités :

$$\frac{\mathbf{HB}}{\mathbf{AB}} = \boxed{\frac{\mathbf{BA}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{HA}}{\mathbf{AC}}} \qquad (1)$$

et utilisons maintenant l'égalité des deux derniers rapports c'est-à-dire la proportion :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC};$$

nous en déduisons :

$$\boxed{\mathbf{AB \times AC = BC \times AH}} \qquad (4)$$

▪ THÉORÈME. — ***Le produit des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur.***

• REMARQUE. Dans les égalités (2), (3) et (4) il est bien entendu que les segments qui interviennent sont mesurés avec la même unité.

192. Similitude des triangles partiels. — Les triangles HBA et HAC étant semblables (*fig. 144*) leurs côtés homologues sont proportionnels. Nous pouvons donc écrire, en n'utilisant que les côtés de l'angle droit :

$$\frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC}, \qquad (5)$$

d'où nous déduisons :

$$\boldsymbol{HA^2 = HB \times HC} \qquad (6)$$

▪ THÉORÈME. — ***Dans un triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.***

193. Théorème de Pythagore[1]. — Nous avons démontré les égalités :

$$AB^2 = BC \times HB, \qquad (2)$$
$$AC^2 = BC \times HC. \qquad (3)$$

En les ajoutant membre à membre, nous obtenons :

$$AB^2 + AC^2 = BC \times HB + BC \times HC$$
$$= BC\,(HB + HC).$$

Or les segments BH et HC sont des segments consécutifs, leur somme est le segment BC. Nous avons donc :

$$AB^2 + AC^2 = BC \times BC = BC^2$$

$$\boldsymbol{AB^2 + AC^2 = BC^2} \qquad (7)$$

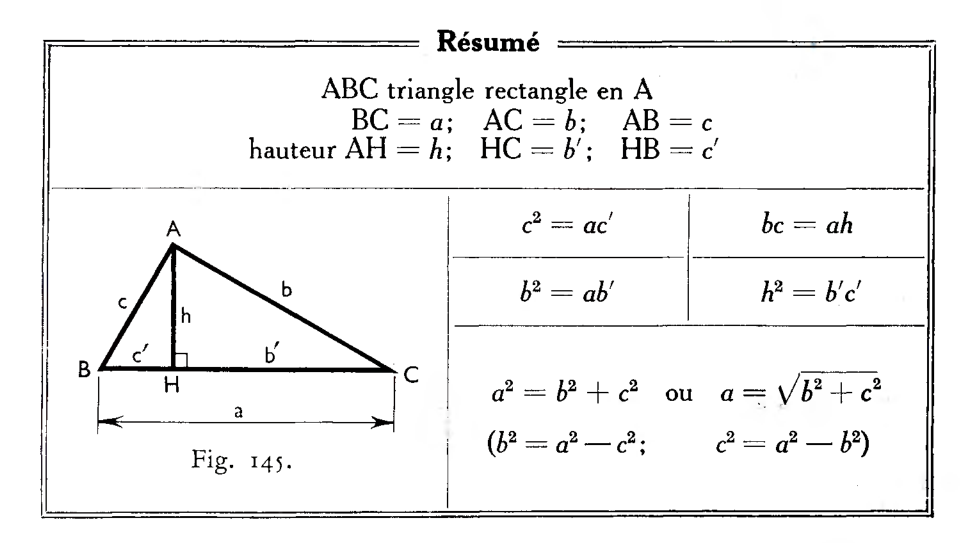
Nous énoncerons le théorème suivant, connu sous le nom de théorème de Pythagore :

▪ THÉORÈME DE PYTHAGORE. — ***Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.***

1. PYTHAGORE, mathématicien et philosophe grec (VIe siècle av. J.-C.).

• Remarque. Les égalités qui viennent d'être démontrées sont connues sous le nom de *relations métriques dans le triangle rectangle*.

On entend par relation métrique, en général, une relation entre les mesures des segments qui interviennent dans une certaine figure. Nous rappelons qu'il s'agit toujours de mesures faites avec la même unité de longueur.



Résumé

ABC triangle rectangle en A
$BC = a$; $AC = b$; $AB = c$
hauteur $AH = h$; $HC = b'$; $HB = c'$

Fig. 145.

$c^2 = ac'$	$bc = ah$
$b^2 = ab'$	$h^2 = b'c'$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{ou} \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$(b^2 = a^2 - c^2; \qquad c^2 = a^2 - b^2)$$

194. Réciproque du théorème de Pythagore. — Soit trois segments de mesures respectives a, b, c (avec la même unité de longueur) telles que :

$$a^2 = b^2 + c^2. \qquad (8)$$

Traçons un angle droit $\widehat{xAy}$. Marquons sur le côté Ax le point B tel que $AB = c$ et sur le côté Ay le point C tel que $AC = b$ (*fig. 146*). Le triangle ABC est rectangle en A et, en lui appliquant le théorème de Pythagore, nous obtenons :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2,$$

ou :

$$BC^2 = b^2 + c^2.$$

Or, d'après (8),

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Par suite : $BC = a$.

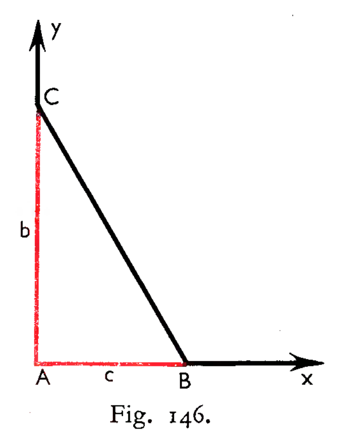


Fig. 146.

Il existe donc un triangle ABC dont les côtés ont pour mesures respectives $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$ et ce triangle est rectangle en A.

Nous énoncerons :

▪ THÉORÈME RÉCIPROQUE. — ***Si trois segments ont des mesures respectives* a, b, c *vérifiant l'égalité :***

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2},$$

***il existe un triangle de côtés* a, b, c *et ce triangle est rectangle. Son hypoténuse a pour mesure* a.**

EXEMPLE. On a :

$$5^2 = 4^2 + 3^2.$$

Le triangle ABC dont les côtés ont pour mesures :

$$BC = 5 \text{ cm}; \quad AC = 4 \text{ cm}; \quad AB = 3 \text{ cm}$$

est donc rectangle en A.

Il en serait de même pour un triangle A'B'C' dans lequel :

$$B'C' = 5\,k; \quad A'C' = 4\,k; \quad A'B' = 3\,k$$

où k est un nombre quelconque, car les côtés de ce triangle seraient respectivement proportionnels à 5, 4, 3. Par suite le triangle A'B'C' serait semblable au triangle ABC, il serait donc aussi rectangle.

• REMARQUE. Les autres relations métriques du triangle rectangle admettent aussi des réciproques. Elles seront étudiées en exercices.

195. Applications numériques. — En conservant les notations du n° 193, on peut calculer les longueurs a, b, c, h, b', c' dès que l'on connaît deux d'entre elles.

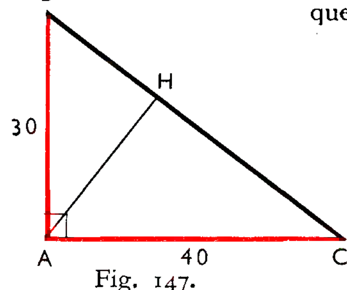


Fig. 147.

EXEMPLES. I. *On donne b et c :*

$b = 40$ mm, $c = 30$ mm (*fig. 147*).

D'après le théorème de Pythagore :

$a^2 = 1\,600 + 900 = 2\,500$, d'où $a = 50$ mm.

La relation $b^2 = ab'$

donne : $b' = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{1\,600}{50} = 32,$

$CH = b' = 32$ mm.

De même $c^2 = ac'$ donne : $c' = \dfrac{c^2}{a} = \dfrac{900}{50} = 18,$

$BH = c' = 18$ mm.

On vérifie que $BH + CH = 50$ mm.

Enfin, on a :

$$h^2 = b'c' = 32 \times 18 = 16 \times 2 \times 9 \times 2,$$
$$h^2 = 16 \times 36 = 4^2 \times 6^2;$$

d'où :

$$\text{AH} = h = 24 \text{ mm.}$$

On aurait pu aussi écrire :

$$\text{AH} \times \text{BC} = \text{AB} \times \text{AC},$$

ou :

$$h \times 50 = 40 \times 30 \qquad \text{d'où :} \qquad h = 24.$$

Ce deuxième procédé évite l'extraction d'une racine carrée qui peut n'être pas immédiate.

II. *On donne h et b'*. $h = 24$ mm, $b' = 32$ mm.

On peut construire le triangle AHC rectangle en H, dont on connaît les côtés de l'angle droit HA = 24 et HC = 32. Le troisième sommet B du triangle cherché est l'intersection du support de HC et de la perpendiculaire en A à AC (*fig. 148*).

La relation $h^2 = b'c'$

donne : $c' = \frac{h^2}{b'} = \frac{24^2}{32} = 18,$

$$\text{BH} = c' = 18 \text{ mm.}$$

On a ensuite :

$$a = b' + c' = 32 + 18 = 50,$$
$$\text{BC} = a = 50 \text{ mm.}$$

Fig. 148.

La relation $b^2 = ab'$ donne : $b^2 = 50 \times 32 = 1\,600,$

$$\text{AC} = b = 40 \text{ mm.}$$

La relation $c^2 = ac'$ donne : $c^2 = 50 \times 18 = 900,$

$$\text{AB} = c = 30 \text{ mm.}$$

196. Diagonale d'un carré. — Soit a la mesure du côté d'un carré ABCD. La diagonale BD le partage en deux triangles rectangles isocèles (*fig. 149*). Le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABD donne :

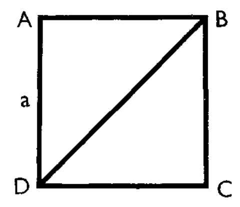


Fig. 149.

$$\text{BD}^2 = \text{AB}^2 + \text{AD}^2,$$
$$\text{BD}^2 = a^2 + a^2 = 2\,a^2,$$

d'où :

$$\mathbf{BD} = a\sqrt{2}$$

▪ ***La diagonale d'un carré de côté a a pour mesure a $\sqrt{2}$.***

197. Hauteur d'un triangle équilatéral — Soit a la mesure du côté d'un triangle équilatéral ABC. Traçons la hauteur AH. On a (*fig. 150*) :

$$BH = HC = \frac{a}{2}.$$

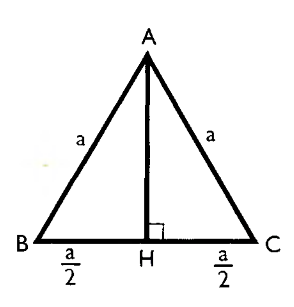


Fig. 150.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle AHB donne :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2; \qquad a^2 = AH^2 + \frac{a^2}{4};$$

d'où : $$AH^2 = \frac{3\,a^2}{4},$$

et $$\mathbf{AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

▪ ***La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a a pour mesure $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.***

198. Longueur d'un segment dont on connaît les coordonnées des extrémités. — Soit AB un segment dont les extrémités A et B sont repérées par leurs coordonnées rapportées à deux axes $x'Ox$, $y'Oy$ rectangulaires sur lesquels *on a choisi une même unité de longueur* (*fig. 151*) : A (x_1, y_1) et B (x_2, y_2).

La parallèle à $x'x$, passant par A, coupe la parallèle à Oy, passant par B, en un point C. On forme ainsi un triangle ABC rectangle en C (si AB n'est pas parallèle à l'un des axes). D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

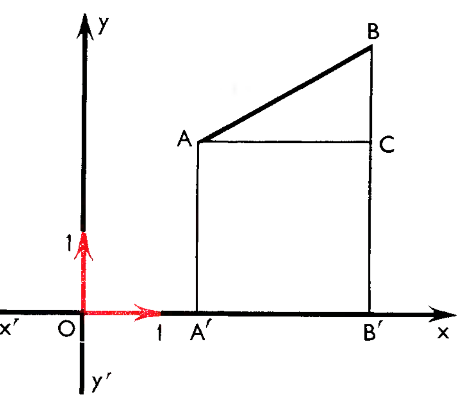


Fig. 151.

Calculons AC. La projection du segment AC sur $x'x$ est la même que la projection A'B' du segment AB. On a donc : AC = A'B'.

Or A′ a pour abscisse x_1 et B′ pour abscisse x_2. On sait que :

$$A'B' = |x_2 - x_1|.$$

Donc : $$AC^2 = A'B'^2 = (x_2 - x_1)^2.$$

De la même façon, on a : $BC^2 = (y_2 - y_1)^2$.

On en déduit la formule :

$$\mathbf{AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Si le segment AB est parallèle à Ox : $AB = |x_2 - x_1|$.
Si le segment AB est parallèle à Oy : $AB = |y_2 - y_1|$.

● **Applications.**

Dans les exercices suivants ABC désigne un triangle rectangle en A; AH est la hauteur issue de A. On pose :

$$BC = a; \quad AC = b; \quad AB = c; \quad AH = h; \quad CH = b'; \quad BH = c'.$$

On donne b *et* c. Construire le triangle. Calculer *a*, *h*, *b′*, *c′* dans les cas suivants :

864. b = 15 cm, c = 8 cm. **865.** b = 12 cm, c = 5 cm.

On donne c *et* h. Construire le triangle. Calculer *c′*, *b′*, *a*, *b* dans les cas suivants :

866. c = 5 cm, h = 3 cm. **867.** c = 13 cm, h = 5 cm.

On donne a *et* b. Construire le triangle. Calculer *c*, *h*, *b′*, *c′* dans les cas suivants :

868. a = 13 mm, b = 5 mm. **869.** a = 37 mm, b = 35 mm.

On donne a *et* c′. Construire le triangle. Calculer *b′*, *h*, *b*, *c* dans les cas suivants :

870. a = 9 cm, c′ = 4 cm. **871.** a = 12,8 cm, c′ = 7,2 cm.

On donne b′ *et* c′. Construire le triangle. Calculer *a*, *h*, *b*, *c* dans les cas suivants :

872. b′ = 9 cm, c′ = 16 cm. **873.** b′ = 2 cm, c′ = 8 cm.

874. — *Dans un triangle isocèle* ABC *on suppose* AB = AC = 15 *cm*, BC = 18 *cm*. *Calculer la hauteur* AH.

875. — 1° *Calculer le côté d'un triangle équilatéral de hauteur* h = 8 *cm*.
2° *Calculer le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit à ce triangle.*

II. RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES D'UN ANGLE AIGU

199. Étude d'un triangle rectangle ayant un angle aigu donné. — Soit un angle aigu $\widehat{xOy}$ mesuré, avec une unité choisie, par le nombre α. Nous pouvons construire des triangles rectangles qui admettent $\widehat{xOy}$ pour angle aigu en traçant des perpendiculaires au côté Ox en A, A′ .... Ces perpendiculaires coupent Oy en B, B′ .... Nous obtenons les triangles OAB, OA′B′, ... rectangles en A, A′ .... Ces triangles sont semblables. On a donc (*fig. 152*) :

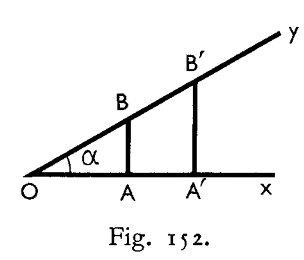


Fig. 152.

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Les deux premiers rapports égaux fournissent la proportion $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$ que l'on peut écrire aussi sous la forme :

$$\boxed{\frac{\mathbf{OA}}{\mathbf{OB}} = \frac{\mathbf{OA'}}{\mathbf{OB'}}} \qquad (1)$$

Les deux derniers rapports égaux fournissent la proportion $\frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$ que l'on peut écrire sous la forme :

$$\boxed{\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{OB}} = \frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{OB'}}} \qquad (2)$$

Le premier et le dernier des rapports égaux fournissent la proportion $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$ que l'on peut écrire sous la forme :

$$\boxed{\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{OA}} = \frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{OA'}}} \qquad (3)$$

Nous voyons ainsi que chacun des rapports :

$$\frac{OA}{OB}, \quad \frac{AB}{OB}, \quad \frac{AB}{OA}$$

est indépendant de la position de A sur la demi-droite Ox. Il ne dépend que de la mesure α de l'angle $\widehat{xOy}$.

Chacun de ces rapports est conventionnellement désigné par une dénomination que nous allons préciser.

200. Cosinus d'un angle aigu. — ☆ ***On appelle* cosinus de l'angle aigu $\widehat{AOB}$, *de mesure* α, *le rapport* $\frac{OA}{OB}$ *du côté* OA *de l'angle droit du triangle rectangle* AOB, *à l'hypoténuse* OB.**

On écrit :

$$\cos\alpha = \cos\widehat{AOB} = \frac{OA}{OB}$$

On lit : « cosinus α (ou cosinus $\widehat{AOB}$) égale OA sur OB ». Puisque l'on a : $OA < OB$, on en déduit que :

- ***Le cosinus d'un angle aigu est un nombre positif inférieur à 1.***

Réciproquement, tout nombre positif inférieur à 1 est le cosinus d'un angle aigu et d'un seul.

Exemple. *Construire un angle α tel que $\cos\alpha = 0,45$.*

On a : $$0,45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}.$$

Il suffit de construire un triangle rectangle OAB dont un côté de l'angle droit OA et l'hypoténuse OB sont proportionnels aux nombres 9 et 20. On peut prendre 9 mm et 20 mm (ou 18 mm et 40 mm). L'angle $\widehat{AOB}$ a 0,45 pour cosinus (*fig. 153*).

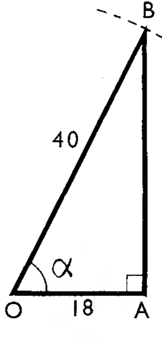


Fig. 153.

201. Sinus d'un angle aigu. — ☆ ***On appelle* sinus de l'angle aigu $\widehat{AOB}$, *de mesure* α, *le rapport* $\frac{AB}{OB}$ *du côté* AB *de l'angle droit du triangle rectangle* AOB, *à l'hypoténuse* OB.**

On écrit :

$$\sin\alpha = \sin\widehat{AOB} = \frac{AB}{OB}$$

On lit : « sinus α (ou sinus $\widehat{AOB}$) égale AB sur OB ».

Puisque l'on a : AB < OB, on en déduit que :

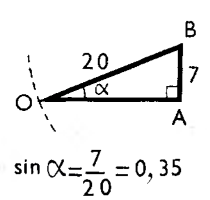


Fig. 154.

- ***Le sinus d'un angle aigu est un nombre positif inférieur à 1.***

Réciproquement, tout nombre positif inférieur à 1 est le sinus d'un angle aigu et d'un seul.

EXEMPLE. *Construire un angle α tel que sin α = 0,35.*

On a : $0{,}35 = \dfrac{35}{100} = \dfrac{7}{20}$.

Il suffit de construire un triangle rectangle OAB dont un côté de l'angle droit AB et l'hypoténuse OB sont proportionnels aux nombres 7 et 20. L'angle $\widehat{AOB}$ a 0,35 pour sinus (*fig. 154*).

202. Tangente d'un angle aigu. — ☆ *On appelle* **tangente de l'angle aigu**

$\widehat{AOB}$, de mesure α, le rapport $\dfrac{AB}{OA}$ du côté AB de l'angle droit du triangle rectangle AOB, au côté OA.

On écrit :

$$\mathbf{tg}\ \alpha = \mathbf{tg}\ \widehat{AOB} = \frac{AB}{OA}$$

et on lit : « tangente α (ou tangente $\widehat{AOB}$) égale AB sur OA ».

- ***La valeur de tg α est un nombre positif.***

Réciproquement, tout nombre positif est la tangente d'un angle aigu et d'un seul.

EXEMPLE. *Construire un angle α tel que tg α = 1,7.*

On a : $1{,}7 = \dfrac{17}{10}$.

B
17
α
O
10
A
tg α = 17/10 = 1,7

Fig. 155.

Il suffit de construire un triangle rectangle OAB dont les côtés AB et OA de l'angle droit sont proportionnels à 17 et à 10. L'angle $\widehat{AOB}$ a 1,7 pour tangente (*fig. 155*).

203. Cotangente d'un angle aigu. — ☆ ***On appelle* cotangente de l'angle aigu $\widehat{AOB}$, *de mesure* α, *le rapport* $\frac{OA}{AB}$ *du côté* OA *de l'angle droit du triangle rectangle* AOB, *au côté* AB.**

On écrit :

$$\boxed{\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} \widehat{AOB} = \frac{OA}{AB}}$$

et on lit : « cotangente α (ou cotangente $\widehat{AOB}$) égale OA sur AB ».

▪ ***La valeur de cotg α est un nombre positif.***

On démontre comme précédemment que, réciproquement, tout nombre positif est la cotangente d'un angle aigu et d'un seul.

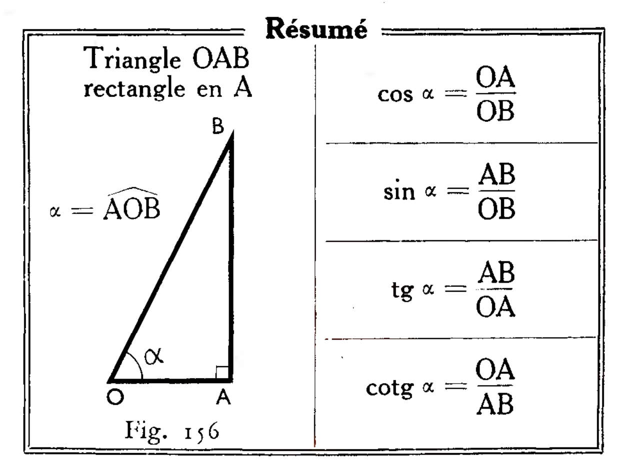


Fig. 156

204. Angles complémentaires. — Nous venons de définir quatre nombres qui sont liés à l'angle $\alpha = \widehat{AOB}$ du triangle AOB.

Si $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont les angles aigus d'un triangle ABC, rectangle en A, les définitions précédentes permettent d'écrire :

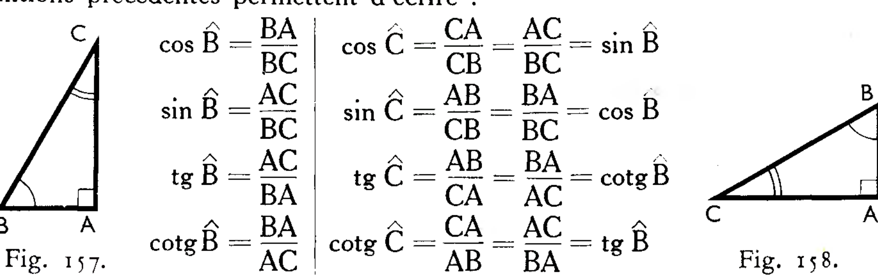


Fig. 157.
Fig. 158.

Les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ étant complémentaires, on peut énoncer le théorème suivant :

- THÉORÈME. — ***Lorsque deux angles aigus sont complémentaires,***
  1° le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre,
  2° la tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre.

EXEMPLES. $\sin 18° = \cos 72°$; $\cos 30 \text{ gr} = \sin 70 \text{ gr}$;
$\text{tg } 75° = \text{cotg } 15°$; $\text{cotg } 53 \text{ gr} = \text{tg } 47 \text{ gr}$.

205. Relations entre les rapports trigonométriques d'un même angle. — Dès que l'on connaît un des quatre rapports trigonométriques d'un angle α, on peut construire cet angle. L'angle α étant construit, son sinus, son cosinus, sa tangente et sa cotangente sont déterminés. On doit donc pouvoir calculer ces rapports dès que l'on connaît l'un d'eux.

1° Relation entre $\text{tg}\,\alpha$ et $\text{cotg}\,\alpha$. On a :

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AB}{OA} \quad \text{et} \quad \text{cotg}\,\alpha = \frac{OA}{AB}.$$

Ces rapports sont inverses l'un de l'autre.

Par suite :

$$\boxed{\textbf{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\textbf{tg}\,\alpha}} \qquad (1)$$

2° Relation entre $\text{tg}\,\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$. On a :

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OB} \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{OA}{OB}.$$

En divisant membre à membre ces égalités, on obtient :

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{AB}{OB}}{\frac{OA}{OB}} = \frac{AB}{OA} = \text{tg}\,\alpha.$$

D'où la relation :

$$\boxed{\textbf{tg}\,\alpha = \frac{\textbf{sin}\,\alpha}{\textbf{cos}\,\alpha}} \qquad (2)$$

et, en vertu de (1), la relation :

$$\boxed{\textbf{cotg}\,\alpha = \frac{\textbf{cos}\,\alpha}{\textbf{sin}\,\alpha}} \qquad (3)$$

3° **Relation entre cos α et sin α.** On a :

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OB} \qquad \text{et} \qquad \sin \alpha = \frac{AB}{OB}.$$

Le théorème de Pythagore, appliqué au triangle OAB rectangle en A, donne :

$$OA^2 + AB^2 = OB^2,$$

ou, en divisant, les deux membres par OB^2 :

$$\left(\frac{OA}{OB}\right)^2 + \left(\frac{AB}{OB}\right)^2 = 1,$$

et, par suite :

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1.$$

On écrit $\cos^2 \alpha$ au lieu de $(\cos \alpha)^2$
et $\sin^2 \alpha$ au lieu de $(\sin \alpha)^2$,

et on lit « cosinus carré α » et « sinus carré α ».

D'où :

$$\boxed{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1} \qquad (4)$$

4° **Relation entre cos α et tg α.** De la relation (2) on déduit :

$$\sin \alpha = \cos \alpha \times \operatorname{tg} \alpha.$$

En portant dans (4), on obtient :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha = 1,$$

ou :

$$\cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 1.$$

Par suite :

$$\boxed{\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \qquad (5)$$

5° **Relation entre sin α et tg α.** De la relation (2) on déduit :

$$\sin \alpha = \cos \alpha \times \operatorname{tg} \alpha;$$

d'où :

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \times \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

En tenant compte de (5), on obtient la relation :

$$\boxed{\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \qquad (6)$$

Il y a lieu de savoir par cœur ces formules.

Formules

$$\sin(1\,\text{D} - \alpha) = \cos\alpha; \qquad \cos(1\,\text{D} - \alpha) = \sin\alpha.$$
$$\text{tg}\,(1\,\text{D} - \alpha) = \text{cotg}\,\alpha; \qquad \text{cotg}\,(1\,\text{D} - \alpha) = \text{tg}\,\alpha.$$
$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}; \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}; \qquad \sin^2\alpha = \frac{\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}.$$

EXEMPLES. I. *On donne* $\sin\alpha = 0{,}8$. *Calculer* $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{cotg}\,\alpha$.

On a : $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$; d'où : $\cos\alpha = 0{,}6$;

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4}; \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{4}{3}.$$

II. *On donne* $\text{tg}\,\alpha = 2{,}4$. *Calculer* $\text{cotg}\,\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

On a :
$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{2{,}4} = \frac{5}{12};$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{12^2}{5^2}} = \frac{25}{25+144} = \frac{25}{169};$$

d'où :
$$\cos\alpha = \frac{5}{13}.$$

On en déduit :
$$\sin\alpha = \cos\alpha\,\text{tg}\,\alpha = \frac{5}{13} \times 2{,}4 = \frac{12}{13}.$$

206. Rapports trigonométriques de quelques angles remarquables

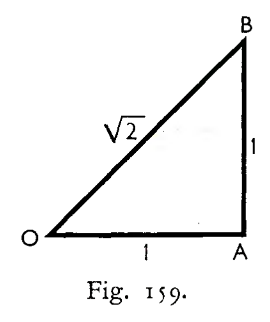


Fig. 159.

1° Angle de 45°. — Comme cet angle est égal à son complément, l'on a :

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ,$$

et, par conséquent :

$$\text{tg}\,45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1; \qquad \text{cotg}\,45^\circ = 1.$$

Si nous construisons un triangle isocèle OAB, rectangle en A, dont les côtés égaux OA et AB ont pour mesure 1, l'angle $\widehat{AOB}$ mesure 45° et on sait que la mesure de l'hypoténuse est $\sqrt{2}$ (*fig. 159*).

Par suite :
$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \text{tg}\, 45^\circ = \text{cotg}\, 45^\circ = 1.$$

2° **Angles de 30° et de 60°.** — Comme ces angles sont complémentaires, l'on a :

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ; \quad \sin 60^\circ = \cos 30^\circ;$$
$$\text{tg}\, 30^\circ = \text{cotg}\, 60^\circ; \quad \text{tg}\, 60^\circ = \text{cotg}\, 30^\circ.$$

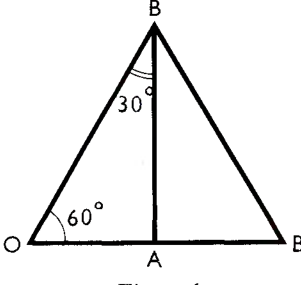


Fig. 160.

Construisons un triangle équilatéral OBB′ et traçons la hauteur BA. Nous obtenons les angles $\widehat{AOB} = 60^\circ$; $\widehat{OBA} = 30^\circ$ et (*fig. 160*) :

$$OB = 2\, OA; \qquad AB = OB \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (\text{n}^\circ\ 197).$$

Par suite :

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{2}; \qquad \sin \widehat{AOB} = \frac{AB}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On en déduit :

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \qquad \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

et, par suite :

$$\text{tg}\, 30^\circ = \text{cotg}\, 60^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$
$$\text{cotg}\, 30^\circ = \text{tg}\, 60^\circ = \frac{1}{\text{tg}\, 30^\circ} = \sqrt{3}.$$

Ces valeurs sont résumées dans le tableau suivant qui doit être su par cœur.

ANGLES	SINUS	COSINUS	TANGENTE	COTANGENTE
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

207. Tables trigonométriques. — Pour des angles quelconques, on a pu calculer des valeurs approchées des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes. On trouvera pages 344 et 345 une table donnant ces valeurs pour les angles de degré en degré et de grade en grade. Ces rapports sont donnés avec 4 décimales.

On a dressé un tableau des rapports trigonométriques des angles de 0° à 45° ou de 0 à 50 gr. Puis on a mis à la fin de chaque ligne la valeur du complément de l'angle correspondant.

Le sinus d'un angle lu à gauche est égal au cosinus de l'angle lu à droite.

EXEMPLE. 0,190 8 est aussi bien une valeur approchée de sin 11° que de cos 79°.

On a fait de même pour la tangente et la cotangente.

Par suite, les en-têtes de colonne correspondent aux angles de 0° à 45° (ou de 0 gr à 50 gr) lus dans la colonne de gauche de haut en bas. Les indications placées au bas de chaque colonne correspondent aux angles de 45° à 90° (ou de 50 gr à 100 gr) lus dans la colonne de droite de bas en haut.

208. Problème. — *Calculer une valeur approchée d'un rapport trigonométrique.* Si l'angle donné est mesuré en degrés ou en grades par un nombre entier, la table fournit la réponse.

EXEMPLES. I. *Valeur approchée de sin* 36°.

36° est lu dans la colonne de gauche. On lit la réponse au croisement de la colonne en haut de laquelle est écrit « sinus » et de la ligne qui commence par 36 :

$$\sin 36^{\circ} \simeq 0{,}5878.$$

On emploie le signe $\simeq$ pour exprimer qu'il s'agit de valeurs approchées.

II. On trouve de même :

$$\cos 25 \text{ gr} = \sin 75 \text{ gr} \simeq 0{,}9239; \qquad \operatorname{tg} 54^{\circ} = \operatorname{cotg} 36^{\circ} \simeq 1{,}3764.$$

Si l'angle contient une fraction de degré (ou de grade), on admet, ce qui n'est pas exact, mais suffisamment approché, que l'augmentation ou la diminution du rapport trigonométrique est proportionnelle à l'augmentation de l'angle. On dit que l'on a fait une *interpolation proportionnelle*.

EXEMPLE. *Calculer une valeur approchée de sin 43,7 gr.*

Nous dirons : $\left.\begin{array}{l}\sin 43 \text{ gr} \simeq 0{,}6252 \\ \sin 44 \text{ gr} \simeq 0{,}6374\end{array}\right\}$ différence 0,0122.

Augmentation pour 0,7 gr :

$$0{,}0122 \times 0{,}7 \text{ soit } 0{,}00854.$$

Nous prendrons pour valeur approchée :

$$\begin{aligned}\sin 43{,}7 \text{ gr} &\simeq 0{,}6252 + 0{,}0085 \\ &\simeq 0{,}6337.\end{aligned}$$

On remarque en consultant les tables que $\sin\alpha$ et $\operatorname{tg}\alpha$ croissent avec α tandis que $\cos\alpha$ et $\operatorname{cotg}\alpha$ diminuent lorsque α augmente. La correction à apporter lorsqu'il s'agira d'un cosinus ou d'une cotangente sera donc *soustractive*.

EXEMPLE. *Calculer une valeur approchée de cotg 59°25′.*

Nous lisons : $\left.\begin{array}{l}\operatorname{cotg} 59^\circ \simeq 0{,}6009 \\ \operatorname{cotg} 60^\circ \simeq 0{,}5774\end{array}\right\}$ différence 0,0235.

Nous constatons que la cotangente cherchée est comprise entre 0,6009 et 0,5774. Il faudra donc diminuer 0,6009 de :

$$0{,}0235 \times \frac{25}{60} = 0{,}0235 \times \frac{5}{12} \simeq 0{,}0096 \quad \text{(par excès)}.$$

Nous prendrons $\operatorname{cotg} 59^\circ 25' \simeq 0{,}6009 - 0{,}0096$
$\simeq 0{,}5913.$

209. Problème inverse. — *Calculer la mesure de l'angle connaissant la valeur d'un rapport trigonométrique.*

Si la valeur du rapport se trouve dans la table, on lit directement la réponse.

EXEMPLES.

$\sin\alpha = 0{,}5621$	on lit dans la table	$\alpha \simeq 38$ gr;
$\cos\alpha = 0{,}5299$	on lit	$\alpha \simeq 58^\circ$;
$\operatorname{cotg}\alpha = 2{,}1445$	on lit	$\alpha \simeq 25^\circ$;
$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}36$	on lit	$\alpha \simeq 22$ gr.

Ces valeurs de α sont approchées puisque la table ne donne pas de valeurs exactes.

Si la valeur du rapport ne se trouve pas dans la table, on utilise comme précédemment une interpolation proportionnelle.

EXEMPLE. *Calculer α sachant que $\cos\alpha = 0{,}75$.*

On lit : $\left.\begin{array}{l}\cos 42^\circ \simeq 0{,}7431 \\ \cos 41^\circ \simeq 0{,}7547\end{array}\right\}$ différence 0,0116.

L'angle α est donc compris entre 41° et 42°.

On a : $0{,}7547 - 0{,}75 = 0{,}0047.$

Il faudra donc ajouter à 41° la fraction $\frac{0{,}0047}{0{,}0116}$ de degré ou $\frac{47}{116} \times 60$ minutes, soit 24′ environ.

Nous écrirons : $\alpha \simeq 41^\circ 24'.$

TABLE TRIGONOMÉTRIQUE DE DEGRÉ EN DEGRÉ

Degrés	Sinus	Cosinus	Tangente	Cotangente	
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	**89**
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	**88**
3	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	**87**
4	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	**86**
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	**85**
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	**84**
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	**83**
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	**82**
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	**81**
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	**80**
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	**79**
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	**78**
13	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	**77**
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	**76**
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	**75**
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	**74**
17	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	**73**
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	**72**
19	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	**71**
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	**70**
21	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	**69**
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	**68**
23	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	**67**
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	**66**
25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	**65**
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	**64**
27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	**63**
28	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	**62**
29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	**61**
30	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	**60**
31	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	**59**
32	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	**58**
33	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	**57**
34	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	**56**
35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	**55**
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	**54**
37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	**53**
38	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	**52**
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	**51**
40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	**50**
41	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	**49**
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	**48**
43	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	**47**
44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	**46**
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	**45**
	Cosinus	**Sinus**	**Cotangente**	**Tangente**	**Degrés**

TABLE TRIGONOMÉTRIQUE DE GRADE EN GRADE

Grades	Sinus	Cosinus	Tangente	Cotangente	
1	0,0157	0,9999	0,0157	63,6567	**99**
2	0,0314	0,9995	0,0314	31,8205	**98**
3	0,0471	0,9989	0,0472	21,2049	**97**
4	0,0628	0,9980	0,0629	15,8945	**96**
5	0,0785	0,9969	0,0787	12,7062	**95**
6	0,0941	0,9956	0,0945	10,5789	**94**
7	0,1097	0,9940	0,1104	9,0579	**93**
8	0,1253	0,9921	0,1263	7,9158	**92**
9	0,1409	0,9900	0,1423	7,0264	**91**
10	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	**90**
11	0,1719	0,9851	0,1745	5,7297	**89**
12	0,1874	0,9823	0,1908	5,2422	**88**
13	0,2028	0,9792	0,2071	4,8288	**87**
14	0,2181	0,9759	0,2235	4,4737	**86**
15	0,2334	0,9724	0,2401	4,1653	**85**
16	0,2487	0,9686	0,2568	3,8947	**84**
17	0,2639	0,9646	0,2736	3,6554	**83**
18	0,2790	0,9603	0,2905	3,4420	**82**
19	0,2940	0,9558	0,3076	3,2506	**81**
20	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	**80**
21	0,3239	0,9461	0,3424	2,9208	**79**
22	0,3387	0,9409	0,3600	2,7776	**78**
23	0,3535	0,9354	0,3779	2,6464	**77**
24	0,3681	0,9298	0,3959	2,5257	**76**
25	0,3827	0,9239	0,4142	2,4142	**75**
26	0,3971	0,9178	0,4327	2,3109	**74**
27	0,4115	0,9114	0,4515	2,2148	**73**
28	0,4258	0,9048	0,4706	2,1251	**72**
29	0,4399	0,8980	0,4899	2,0413	**71**
30	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	**70**
31	0,4679	0,8838	0,5295	1,8887	**69**
32	0,4818	0,8763	0,5498	1,8190	**68**
33	0,4955	0,8686	0,5704	1,7532	**67**
34	0,5090	0,8607	0,5914	1,6909	**66**
35	0,5225	0,8526	0,6128	1,6319	**65**
36	0,5358	0,8443	0,6346	1,5757	**64**
37	0,5490	0,8358	0,6569	1,5224	**63**
38	0,5621	0,8271	0,6796	1,4715	**62**
39	0,5750	0,8181	0,7028	1,4229	**61**
40	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	**60**
41	0,6004	0,7997	0,7508	1,3319	**59**
42	0,6129	0,7902	0,7757	1,2892	**58**
43	0,6252	0,7804	0,8012	1,2482	**57**
44	0,6374	0,7705	0,8273	1,2088	**56**
45	0,6494	0,7604	0,8541	1,1709	**55**
46	0,6613	0,7501	0,8816	1,1343	**54**
47	0,6730	0,7396	0,9099	1,0990	**53**
48	0,6845	0,7290	0,9391	1,0649	**52**
49	0,6959	0,7181	0,9691	1,0319	**51**
50	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	**50**
	Cosinus	**Sinus**	**Cotangente**	**Tangente**	**Grades**

210. Relations trigonométriques dans un triangle rectangle. — Soit ABC un triangle rectangle en A dont les côtés ont pour mesures respectives :

$$BC = a; \qquad AC = b; \qquad AB = c \qquad (\textit{fig. 161}).$$

Fig. 161.

On sait que :

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a}; \qquad \sin \hat{B} = \frac{b}{a};$$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c}; \qquad \operatorname{cotg} \hat{B} = \frac{c}{b}.$$

$$\cos \hat{C} = \frac{b}{a}; \qquad \sin \hat{C} = \frac{c}{a};$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b}; \qquad \operatorname{cotg} \hat{C} = \frac{b}{c}.$$

On en déduit immédiatement les relations :

$$(1) \qquad b = a \cos \hat{C}; \qquad b = a \sin \hat{B}; \qquad c = a \cos \hat{B}; \qquad c = a \sin \hat{C}$$

et aussi :

$$(2) \qquad b = c \operatorname{tg} \hat{B}; \qquad b = c \operatorname{cotg} \hat{C}; \qquad c = b \operatorname{tg} \hat{C}; \qquad c = b \operatorname{cotg} \hat{C}$$

211. Calculs dans les triangles rectangles. — On sait construire un triangle rectangle connaissant deux côtés, ou un côté et un angle aigu. Nous allons *calculer* les éléments inconnus, angles et côtés, en utilisant les mesures connues de certains éléments. Cela s'appelle *résoudre* le triangle.

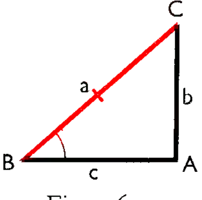


Fig. 162.

1er cas. On connaît l'hypoténuse a et un angle aigu $\hat{B}$ (*fig. 162*).

Les formules à utiliser sont :

$$\hat{C} = 1\,\text{D} - \hat{B}; \qquad b = a \sin B; \qquad c = a \cos B$$

Le calcul est toujours possible.

EXEMPLE. $a = 26{,}5$ mm, $\hat{B} = 41^\circ$.

On a : $\hat{C} = 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$.

On lit dans la table : $\sin 41^\circ \simeq 0{,}6561$; $\cos 41^\circ \simeq 0{,}7547$.

Par conséquent : $b \simeq 26{,}5 \times 0{,}6561$, soit : $17{,}38665$;

$c \simeq 26{,}5 \times 0{,}7547$, soit : $19{,}99955$.

Nous prendrons pour valeurs approchées :

$$b \simeq 17{,}4 \text{ mm}; \quad c \simeq 20 \text{ mm}.$$

2e cas. On donne un côté de l'angle droit b et un angle aigu $\hat{C}$ (*fig. 163*).

Les formules à utiliser sont :

$$\hat{B} = 1\,\text{D} - \hat{C}; \qquad c = b\,\text{tg}\,C; \qquad a = \frac{b}{\cos C}$$

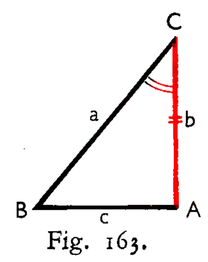


Fig. 163.

Le calcul est toujours possible.

3e cas. On donne l'hypoténuse a et un côté de l'angle droit b (*fig. 164*).

Les formules à utiliser sont :

$$\sin B = \frac{b}{a}; \qquad \hat{C} = 1\,\text{D} - \hat{B}; \qquad c = a\cos B \quad \text{ou} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

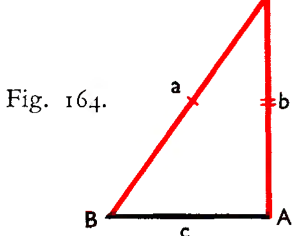


Fig. 164.

Le calcul n'est possible que si : $a > b$.

EXEMPLE. $a = 25$ cm; $b = 18{,}4$ cm.

On a : $\sin B = \dfrac{18{,}4}{25} = 0{,}736.$

On trouve dans la table (calcul en degrés) :

$$\left.\begin{array}{l}\sin 47^\circ \simeq 0{,}7314\\ \sin 48^\circ \simeq 0{,}7431\end{array}\right\} \text{différence } 0{,}0117.$$

Or : $0{,}736 - 0{,}7314 = 0{,}0046.$

A 47° nous ajouterons donc $\dfrac{46}{117} \times 60$ minutes.

On trouve : $\dfrac{46 \times 60}{117} \simeq 24$ par excès.

Nous écrirons donc : $\hat{B} \simeq 47°24'$,

d'où : $\hat{C} \simeq 42°36'$.

On calcule cos 47°24′ comme il a déjà été expliqué et l'on trouve :

$$\cos 47°24' \simeq 0{,}6768.$$

Par suite : $c \simeq 25 \times 0{,}6768$ soit $16{,}92$ cm.

Si l'on avait utilisé le théorème de Pythagore, on aurait écrit :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a-b)(a+b)} = \sqrt{6{,}6 \times 43{,}4} = \sqrt{286{,}44}.$$

On trouve : $c \simeq 16{,}92$.

Ce calcul, qui exige l'extraction d'une racine carrée, n'est pas plus court quand on ne dispose pas d'une table de carrés mais il permet de calculer *c* lorsqu'on ne dispose pas d'une table trigonométrique.

4e cas. **On donne les deux côtés de l'angle droit b et c** (*fig. 165*).

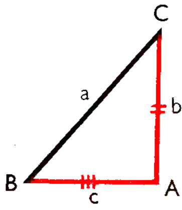


Fig. 165.

Les formules à utiliser sont :

$$\mathbf{tg\,B = \frac{b}{c}}, \qquad \mathbf{\hat{C} = 1\,D - \hat{B}},$$

$$\mathbf{a = \frac{b}{\sin B}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{a = \sqrt{b^2 + c^2}}$$

Le calcul est toujours possible.

● **Applications.**

876. — *Construire les angles qui ont pour cosinus :*
$\frac{2}{5}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 0,42; 0,36; 0,72.

877. — *Construire les angles qui ont pour tangente :*
0,4; 0,35; 1,4; $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4,5.

878. — *Lire dans la table les rapports trigonométriques des angles :*
23°; 72°; 89°; 18 gr; 48 gr; 72 gr.

879. — *Rechercher, en faisant la correction nécessaire, le sinus et le cosinus des angles :*
15°30′; 85°18′; 28,5 gr; 36,4 gr; 82,25 gr.

880. — *Rechercher, en faisant la correction nécessaire, la tangente et la cotangente de :*
18°10′; 43°50′; 80°15′; 35,6 gr; 71,45 gr.

881. — *Calculer les mesures en grades des angles aigus qui ont pour sinus :*
0,279; 0,476; 0,5985; 0,9048; 0,9646.

882. — *Calculer les mesures en grades des angles aigus qui ont pour cosinus :*
0,44; 0,5621; 0,6959; 0,8502; 0,9946.

883. — *Calculer les mesures en degrés des angles aigus qui ont pour cotangente :*
0,41; 0,5665; 0,7002; 1,3455; 2,99.

884. — *On donne* $\sin\alpha = 0{,}4$. *Calculer* $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{cotg}\,\alpha$.

885. — *On donne* $\text{tg}\,\alpha = 0{,}5$. *Calculer* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{cotg}\,\alpha$.

Résoudre un triangle ABC rectangle en A dans les cas suivants (*on a posé* BC = a; AC = b; AB = c) :

886. $b = \sqrt{2} + 1$; $c = \sqrt{2} - 1$. *Calculer :* a; $\hat{B}$ *et* $\hat{C}$ *en degrés.*

887. a = 25; $\hat{B} = 29$ gr. *Calculer :* b, c; $\hat{C}$ *en grades.*

888. c = 17; $\hat{C} = 64°$. *Calculer :* a, b; $\hat{B}$ *en degrés.*

889. a = 43; b = 18. *Calculer :* c; $\hat{B}$ *et* $\hat{C}$ *en grades.*

EXERCICES ET PROBLÈMES

★

890. — On trace un segment AB de mesure 6 cm et les demi-droites Ax et By perpendiculaires à AB et de même sens. Sur Ax, on marque le point C tel que AC = 8 cm. On projette A en H sur BC. La droite AH coupe By en D.

1° Calculer BC, AH, CH en utilisant les relations connues dans le triangle rectangle ABC.

2° Dans le triangle rectangle ABD, on connaît AB (donné) et AH (calculé au 1°). En déduire AD et BD.

3° Calculer CD.

891. — On trace un cercle de centre O et de rayon R; soit AB un diamètre et CD une corde perpendiculaire à AB en H.

1° On donne R = 36 cm, AH = 12,5 mm. Calculer OH et CH. En déduire les mesures de CD et de AC.

2° On donne CD = 24 mm; AC = 13 mm. Calculer CH et AH.

3° On donne R = 30 mm et CD = 48 mm. Calculer OH.

892. — ABCD est un trapèze rectangle dont les mesures des bases sont : AB = 58 mm; CD = 98,8 mm. La hauteur AD a pour mesure 48 mm.

1° Calculer BC.

2° Calculer les mesures des diagonales BD et AC.

893. — Dans un triangle, on donne AB = 5 cm, AC = 6 cm et $\widehat{A} = 30°$.

1° On trace la hauteur BH. Calculer AH, BH, CH.

2° Calculer BC.

3° Mêmes questions, si $\widehat{A} = 45°$; si $\widehat{A} = 60°$.

894. — ABC est un triangle rectangle en A. On projette A en H sur BC.

1° Démontrer que AC est tangente en A au cercle (Γ) circonscrit au triangle ABH. Évaluer de deux façons différentes la puissance de C par rapport à (Γ) et en déduire : $\overline{CA}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CH}$.

2° On trace le cercle (Γ′) de centre B et de rayon BA. Démontrer qu'il est tangent en A à AC. Évaluer de deux façons différentes, la puissance de C par rapport à (Γ′) et retrouver ainsi le théorème de Pythagore.

895. — Dans un triangle rectangle, on suppose qu'un côté de l'angle droit est double de l'autre. Démontrer que la hauteur est double d'un des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse, et qu'elle est la moitié de l'autre segment. Évaluer, à un grade près, les angles aigus de ce triangle rectangle.

896. — ABC est un triangle isocèle de base BC. On projette B en D sur le support de AC. Démontrer la relation :

$$BC^2 = 2\,AC \times DC.$$

897. — ABC est un triangle rectangle en A. On projette le milieu F de AC en G sur BC.

Démontrer la relation : $BG^2 - CG^2 = AB^2$.

(¶ *Comparer* BG — CG *à* BH, *si* H *est la projection de* A *sur* BC.)

898. — Dans un triangle ABC, rectangle en A, les côtés de l'angle droit ont pour mesures AC = 15 cm; AB = 10 cm.

1° Calculer la mesure de $\widehat{B}$ en degrés.

2° La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{B}$ coupe AC en D. Calculer AD.
3° Le point A se projette sur BD en E. Calculer AE.

899. — Soit un triangle isocèle ABC (CA = CB) et la hauteur CH. On a :

$$CH = 10 \text{ cm}; \qquad \widehat{ACB} = 40^\circ.$$

1° Calculer les côtés du triangle.
2° Calculer la hauteur issue de B.
3° Calculer le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit.

900. — Dans un trapèze rectangle ABCD, les bases sont AB et CD. On donne : AB = 35 cm, BC = 10 cm, CD = 27 cm.
1° On trace la hauteur CH. Calculer, en grades, les angles du triangle CHB. Calculer les côtés de ce triangle.
2° En déduire les angles du trapèze.



901. — 1° On donne un carré ABCD de côté a. Sur CD on construit le triangle équilatéral SCD intérieur au carré. Évaluer les angles des triangles ASD et ASB.
2° S se projette sur AB en M et sur CD en H. Exprimer SH et SM en fonction de a.
3° Calculer tg$\widehat{SAB}$.

(B. E. P. C.)

902. — Soit un carré ABCD de côté 3 a. On marque sur le côté AD le point E tel que AE = a et sur DC le point F tel que DF = a. Tracer AF et BE, qui se coupent en H.
1° Démontrer que AF est perpendiculaire à BE.
2° Calculer les côtés du quadrilatère ABFE et ses diagonales en fonction de a.
3° Calculer HE, HA, HB, HF en fonction de a.

(Admission aux E. N.).

903. — On trace un segment de droite AB, puis de A et B, dans le même sens, les demi-droites perpendiculaires à AB, soit Ax et By.
Soit D un point variable de By; du point B on trace la perpendiculaire à AD, qui coupe AD en I et Ax en C.
Démontrer les relations :

$$AB^2 = AC.BD$$

et

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2.$$

(B. E. P. C.)

904. — On trace un demi-cercle de diamètre BC et on marque un point A sur ce demi-cercle. Par un point D du segment BC on trace la perpendiculaire à BC, qui coupe le demi-cercle en E, la droite AB en F et la droite AC en G. Démontrer la relation :

$$DE^2 = DF \times DG.$$

905. — Un carré ABCD a pour côté $a = 6$ cm. On trace le cercle de diamètre BC; soit O son centre. On cherche à construire un cercle de centre O' tangent extérieurement au cercle (O) et tangent en D à AD.

1° On prolonge CD d'un segment $DE = \frac{a}{2}$. Comparer OO' et O'E. En déduire la construction de O'.

2° On pose $O'D = x$. Calculer CO' et OO' en fonction de x.

3° Calculer x.

906. — 1° Tracer un cercle de centre O et de rayon R. On désigne par A et B deux points, intérieurs au cercle, tels que O soit le milieu du segment AB et que $AB = R$. Tracer les cercles de centres respectifs A et B et passant par O. Préciser la position relative de ces deux cercles et leurs positions par rapport au cercle donné.

2° Un quatrième cercle, de rayon x, de centre C est tangent intérieurement au cercle (O) et extérieurement aux cercles (A) et (B). Exprimer en fonction de R et de x les longueurs AO, AC et CO. En déduire x.

907. — Dans un trapèze ABCD, rectangle en A et en D, l'angle $\hat{C}$ a pour mesure 60° et l'angle $\widehat{CBD}$ est droit.

1° Calculer les angles du trapèze.

2° Démontrer que le produit des deux bases est égal au carré d'une des diagonales.

3° On donne $BC = 6$ cm; calculer les côtés du trapèze et les diagonales, et construire le trapèze.

Calculer l'angle de la diagonale AC et du côté CD, puis l'angle des deux diagonales.

908. — On trace un cercle de diamètre AB, de centre O, et les tangentes en $x'Ax$ et $y'By$ en A et B respectivement.

1° La tangente en un point M du cercle coupe $x'x$ en P et $y'y$ en Q. Démontrer que l'angle $\widehat{POQ}$ est droit.

2° Démontrer que : $$AP \times BQ = \frac{AB^2}{4}.$$

909. — ABC est un triangle rectangle en A et AH est la hauteur. Démontrer que :

$$\frac{1}{AH} = \frac{BC}{AB \times AC}.$$

En déduire : $$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

910. — 1° Tracer les graphiques (D) et (D') des fonctions respectives :

$$y = \frac{-3x + 29}{5}; \qquad y = \frac{5x}{3} - 1.$$

2° Calculer les coordonnées du point M commun à (D) et à (D'). Calculer OM.

3° La droite (D) coupe l'axe des x en A et l'axe des y en B; la droite (D') coupe $x'Ox$ en C et $y'Oy$ en E. Calculer les longueurs (en unités du quadrillage) des segments AC, AM, MC, BC, BM.

4° Vérifier les égalités : $$MA^2 + MC^2 = AC^2; \quad MB^2 + MC^2 = BC^2.$$

En déduire que les triangles AMC et BMC sont rectangles.

★ ★ ★

911. — 1° ABC est un triangle rectangle en A et H est la projection de A sur BC. On a démontré la relation : $AB^2 = BH \times BC$.

Démontrer la relation algébrique : $AB^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$.

2° Réciproquement, on projette le sommet A d'un triangle en H sur le côté opposé et on suppose que :

(1) $$AB^2 = \overline{BH}\ \overline{BC}.$$

Déduire de (1) que H est sur le segment BC.

Tracer le cercle circonscrit au triangle AHC et démontrer que B est sur la tangente en A à ce cercle. En conclure que le triangle ABC est rectangle en A.

912. — Tracer en vraie grandeur un triangle ABC, rectangle en A, dont les côtés ont pour mesures : AB = 8 cm; AC = 15 cm. On projette A en H sur l'hypoténuse BC.

1° Démontrer que les 2 triangles AHC et AHB sont semblables. Indiquer leurs sommets homologues. Quel est le rapport de similitude du premier au second?

2° Marquer sur HA le point P tel que les segments BH et BP fassent entre eux un angle de 45°. Indiquer comment on peut construire le point P sans rapporteur.

Marquer sur HC le point R tel que le rapport $\frac{HR}{HC}$ soit égal au rapport $\frac{HP}{HA}$.

Indiquer une construction simple du point R. Calculer PR.

Calculer les angles du triangle AHR.

Démontrer que les supports de BP et AR sont rectangulaires.

3° Quelles sont les hauteurs du triangle BPA?

913. — Deux cordes rectangulaires AB et CD d'un cercle de rayon R se coupent en I :

1° On trace la corde BB′ parallèle à CD. Que peut-on dire de A et de B′ relativement au centre O du cercle?

2° Comparer DB et CB′ et démontrer que : $AC^2 + DB^2 = 4\,R^2$.

3° Calculer la somme $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$.

914. — Dans un triangle ABC on a $\widehat{B} = \widehat{C} + 1\text{ D}$.

1° On trace la hauteur AH.

Calculer l'angle $\widehat{ABH}$ et l'angle $\widehat{HAB}$, en fonction de $\widehat{C}$.

2° Démontrer la relation : $AH^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HC}$.

3° Quelle est la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC?

4° Démontrer la relation : $AC^2 + AB^2 = 4\,R^2$ (R : rayon du cercle circonscrit).

915. — Soit un triangle ABC et AH la hauteur issue de A.

1° On suppose que l'on a : $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$. Le triangle est-il rectangle?

2° On suppose que l'on a : $\overline{AH}^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HC}$.

Démontrer que l'un des angles $\widehat{B}$ ou $\widehat{C}$ est obtus. Comparer les triangles AHB et AHC. En déduire que la différence des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ vaut 90°.

916. — Dans un triangle ABC les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont aigus et AH est une hauteur. Que peut-on dire de l'angle $\widehat{A}$ si l'on a :

1° $AH^2 > BH \times HC$? 2° $AH^2 < BH \times HC$?

CHAPITRE XIII

DROITE ET PLAN

I. PLAN

212. Notion de plan. — Lorsqu'un menuisier *dresse* une planche à l'aide d'une varlope, il ne trouve son travail parfait que si l'arête de sa varlope peut s'appliquer exactement sur la planche dans toutes les directions possibles. Il a obtenu une surface *plane*.

☆ DÉFINITION. — ***Le plan est une surface telle que, si une droite passe par deux quelconques de ses points, tout point de la droite est dans le plan.***

Il s'agit de *toutes* les directions et non pas de quelques-unes seulement. On peut appliquer l'arête d'une règle sur un tuyau de poêle, mais pas n'importe comment : un tuyau de poêle n'est pas une surface plane.

213. Représentation du plan. — Nous n'observons que des portions de plans : murs, planches à dessins, miroirs, etc... Mais on peut imaginer qu'on prolonge ces portions de surface indéfiniment dans toutes les directions : on aura alors un plan, surface illimitée.

De même qu'en géométrie plane nous n'avons pu dessiner que des portions de droites que nous imaginions susceptibles d'être prolongées à volonté, nous ne représenterons que des portions de plan limitées par les possibilités du dessin.

En outre, les éléments géométriques qui interviendront ne seront pas tous

situés dans un même plan; nous dirons que nous étudions la *géométrie dans l'espace*. Nous ne pouvons donc pas, sur un dessin fait au tableau ou sur une feuille de papier, représenter les figures en vraie grandeur. Nous dessinerons ces figures comme nous les verrions si elles étaient matérialisées.

Un plan, en particulier, sera représenté par un dessin où figure un parallélogramme symbolisant un rectangle de bristol, par exemple. La *figure 166* est l'image d'un plan. Une lettre, placée, dan un coin, permet de désigner le plan. Nous dirons : le plan (P). Il est bien entendu que ce plan (P) est illimité et que c'est seulement pour la commodité du dessin que nous n'en représentons qu'une portion. Il arrive parfois que l'on ne termine pas le parallélogramme : on n'en indique que trois côtés ou même deux seulement (*fig. 167*).

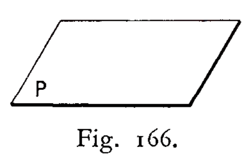


Fig. 166.

EXEMPLE. La portion CB de la règle AB qui repose sur la table par le segment AC est encore dans le plan de la table (*fig. 168*).

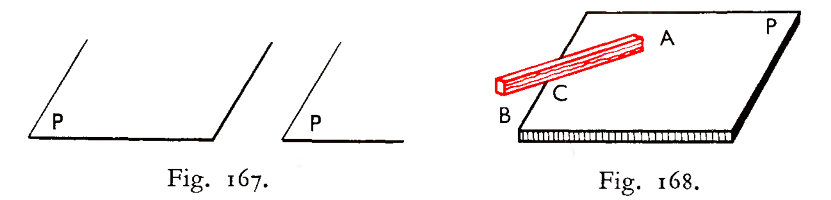


Fig. 167. Fig. 168.

214. Régions de l'espace séparées par un plan. — On a la notion intuitive, par rapport à un plan matérialisé, de deux *régions* séparées par ce plan : celle qui est située d'un côté du plan et celle qui est située de l'autre côté. On ne peut pas tracer une ligne joignant un point d'une région à un point de l'autre sans qu'elle traverse le plan.

En particulier, toute droite (D) qui passe par deux points A et B situés de part et d'autre d'un plan *coupe* ce plan en un point I. Ce point est le seul point de (D) qui est dans (P), sinon la droite serait tout entière dans le plan. Ce point s'appelle l'*intersection* de la droite et du plan (*fig. 169*) ou la *trace* de la droite sur le plan, ou le *point commun* à la droite et au plan.

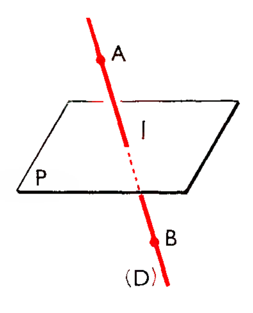


Fig. 169.

On dit aussi que la droite *perce* le plan en I.

Ce point I sépare la droite (D) en deux demi-droites opposées, situées de part et d'autre du plan (P).

215. Demi-plan. — De même qu'un point sépare une droite en deux demi-droites, une droite (D) tracée dans un plan (P) sépare celui-ci en deux parties que l'on nomme des *demi-plans*. Sur la *figure 170*, la droite (D) sépare le plan en deux demi-plans (P′) et (P″), ces demi-plans sont dits *opposés*.

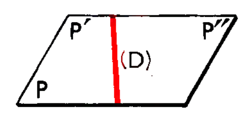


Fig. 170.

La droite (D) est, bien entendu, illimitée; les demi-plans le sont aussi mais seulement de part et d'autre de la droite (D). Cette droite (D) est dite la *frontière* (ou *arête*) des demi-plans (P′) et (P″).

216. Détermination d'un plan. — 1° On constate matériellement que l'on peut placer une carte de visite sur la pointe d'une aiguille d'une infinité de manières.

▪ ***Il y a une infinité de plans passant par un point donné.***

2° Si on se donne *deux points* A et B, tout plan contenant ces deux points contiendra en entier la droite AB. Un tel plan peut tourner autour de AB à la manière d'une porte qui pivote autour de la ligne de ses gonds A et B.

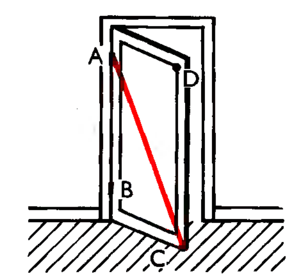
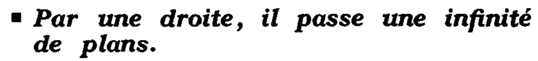


Fig. 171.



▪ ***Par une droite, il passe une infinité de plans.***

Ces plans sont représentés par toutes les positions de la porte.

3° Si l'on plante un clou en C dans le parquet *(fig. 171)*, la porte butera sur ce clou, dans une seule position.



▪ ***Par une droite AB et un point C, non situé sur la droite, il passe un plan et un seul.***

On peut dire aussi que les points A et C déterminent une droite AC du plan. Par conséquent, le plan est déterminé par les *deux droites concourantes* AB et AC ou par les *trois points non alignés* A, B, C. Notons, enfin, que la position de la porte est également déterminée par les *deux droites parallèles* AB et CD.

Nous énoncerons :

▪ ***Un plan est déterminé :***
1° par une droite et un point non situé sur la droite;
2° par deux droites concourantes;
3° par trois points non alignés;
4° par deux droites parallèles.

On désigne parfois un plan par trois points non alignés de ce plan. On dira le plan ABC (A, B, C, n'étant pas alignés).

• Remarque. On peut dire que *si deux droites sont sécantes ou si elles sont parallèles, ces droites sont dans un même plan.*

Mais deux droites peuvent n'avoir aucun point commun sans être parallèles.

Exemples. I. Une droite AB et le point C (*fig. 172*) déterminent le plan (P). Si l'on joint C à un point D non situé dans (P), la droite CD n'est pas dans le plan; elle n'a que le point C commun avec le plan (P); elle ne coupe donc pas AB et ne lui est pas parallèle.

Par AB on peut faire passer une infinité de plans qui coupent CD; aucun d'eux ne contient cette droite.

II. Sur la *figure 173* sont représentés

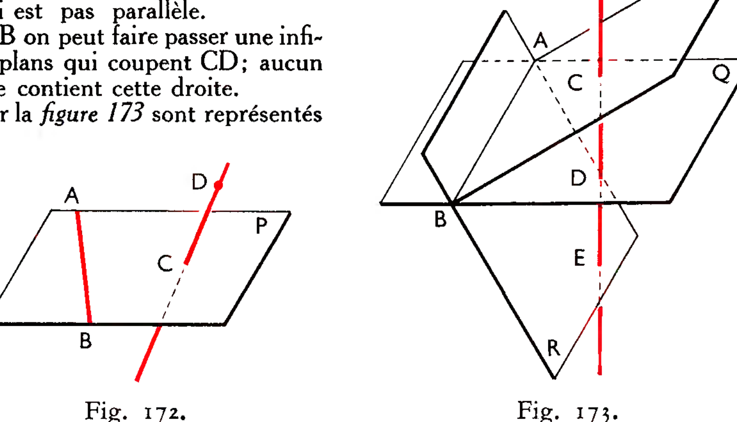


Fig. 172. Fig. 173.

trois plans (P), (Q), (R) passant tous trois par une meme droite AB et percés respectivement en C, D et E par une droite (Δ).

L'élève reproduira cette figure où les plans sont supposés opaques, le ponctué indiquant les parties cachées du dessin.

217. Exemples de figures dans l'espace. — 1° Un *triangle* est une figure plane : son plan est déterminé par les supports de deux des côtés.

2° Un *parallélogramme* est une figure plane : son plan est déterminé par deux côtés opposés ou par deux côtés consécutifs.

3° Trois points A, B, C non alignés et un point D non situé dans le plan ABC définissent 3 à 3, quatre plans : ABC, ACD, ABD, BCD (*fig. 174*).

La figure formée s'appelle un *tétraèdre*.

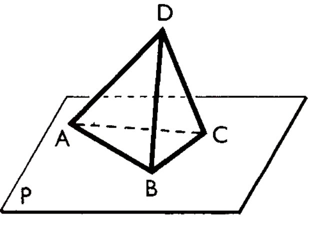


Fig. 174.

218. Génération d'un plan. — On peut engendrer un plan :

1° par une droite mobile (L) passant par un point fixe O et rencontrant une droite fixe xy qui ne contient pas O (*fig. 175*);

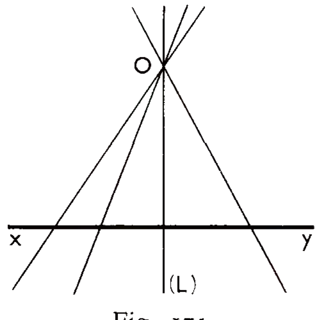


Fig. 175.

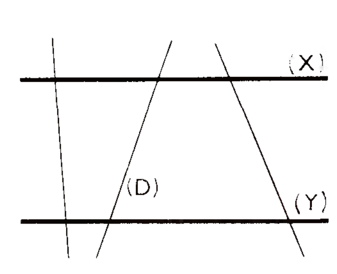
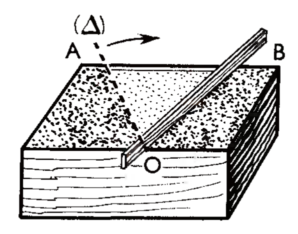
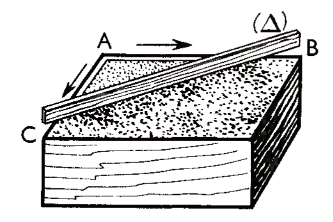


Fig. 176.

2° par une droite mobile (D) qui se déplace en coupant deux droites concourantes ou parallèles en deux points distincts (*fig. 176*).

EXEMPLE. Emploi d'une *rafle* pour remplir une boîte au ras des bords avec du sable fin (*fig. 177*).





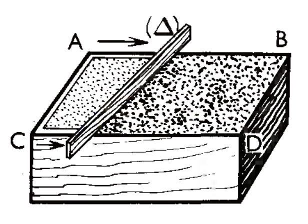


Fig. 177.

La rafle passe par O et s'appuie sur AB. La rafle s'appuie sur deux droites concourantes. La rafle s'appuie sur deux droites parallèles.

219. Glissement d'un plan sur lui-même. — Le *marbre* de l'atelier est une portion de plan. Il est enduit d'une légère couche d'huile contenant de l'ocre rouge. Pour vérifier que la face ABC d'une pièce que l'on dresse est plane, on la pose sur le marbre (*fig. 178*). Si elle n'est pas plane, les saillies seront seules enduites d'ocre, ce qui indique les endroits où le métal doit être limé.

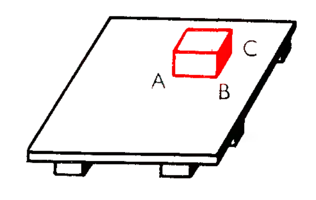


Fig. 178.

Deux plans peuvent être appliqués l'un sur l'autre; la coïncidence n'est pas altérée par le glissement d'un des plans sur l'autre.

220. Intersection d'une droite et d'un plan. — Si l'on trace une droite passant par un point A d'un plan (P) et un point B non situé dans ce plan (*fig. 179*), la droite AB n'est pas contenue dans le plan puisque B n'est pas dans le plan. La droite AB ne peut avoir un autre point que A commun avec (P) sans quoi elle serait dans (P).

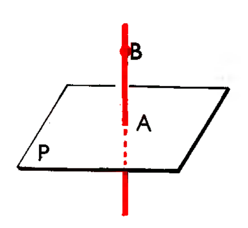


Fig. 179.

On en déduit qu'étant donné une droite (D) et un plan (P), les cas suivants peuvent seuls se présenter :

1° *La droite a deux points dans le plan.* Elle est dans le plan.

2° *La droite a un seul point commun avec le plan.* Elle perce le plan.

3° *La droite n'a aucun point commun avec le plan.* La question se pose de savoir si ce cas peut exister. Elle sera résolue plus loin.

221. Intersection de deux plans. — 1° Si deux plans ont *trois points communs non alignés*, ils coïncident.

2° Si deux plans distincts ont *deux points communs*, ils ont une droite commune qui passe par ces deux points. Aucun point extérieur à cette droite ne peut appartenir aux deux plans, sans quoi les deux plans coïncideraient. La droite commune est dite l'intersection des deux plans.

3° Deux plans distincts peuvent-ils n'avoir qu'*un seul point commun* ? Soit deux plans distincts (P) et (Q) qui ont, en commun, le point A (*fig. 180*).

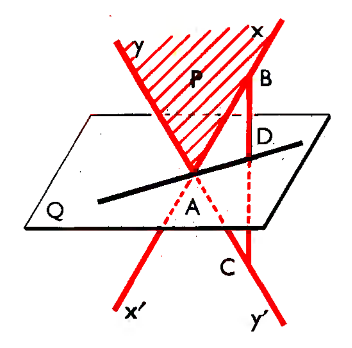


Fig. 180.

Par A, traçons dans (P) une droite quelconque $x'Ax$. Si cette droite appartient à (Q), les deux plans ont une droite commune.

Si cela n'est pas réalisé, nous savons que A sépare la droite $x'x$ en deux demi-droites Ax et Ax' situées de part et d'autre de (Q). En opérant de même avec une autre droite $y'Ay$ de (P) — en supposant qu'elle n'appartienne pas à (Q) — on obtient encore deux demi-droites Ay et Ay' situées de part et d'autre de (Q). Supposons, pour préciser, que Ax et Ay soient dans une même région par rapport à (Q), Ax' et Ay' dans l'autre.

Par un point B de Ax et un point C de Ay' il passe une droite située tout entière dans (P); comme B et C sont de part et d'autre de (Q), la droite BC perce (Q) en un point D (autre que A, sans quoi B, A, C seraient alignés).

Les deux plans (P) et (Q) ont donc en commun deux points A et D et on est ramené au 2°.

Nous énoncerons :

▪ THÉORÈME. — ***Si deux plans distincts ont un point commun, ils ont aussi en commun une droite passant par ce point et ils ne peuvent pas avoir en commun d'autres points que ceux de cette droite.***

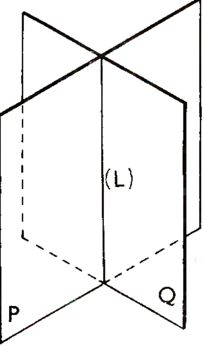


Fig. 181.

On dit qu'ils sont *sécants* :

La droite *commune* (L) s'appelle la *droite d'intersection* des deux plans. Elle sépare chacun des plans en deux demi-plans situés dans deux régions différentes par rapport à l'autre.

Une droite (L) est souvent définie, en géométrie dans l'espace, par la donnée de deux plans distincts qui la contiennent (*fig. 181*).

4° Il resterait à savoir s'il est possible que deux plans distincts n'aient aucun point commun. Cette question sera examinée ultérieurement.

● **Applications.**

Exercices de représentation.

917. *Représenter une droite* (D) *qui perce un plan* (P) *en un point* M *et placer sur* (D) *deux points de part et d'autre de* M.

918. 1° *Représenter un plan* (P), *une droite* xy *située dans* (P), *une droite* (D) *qui coupe* (P) *en un point* A *de* xy.

2° *Tracer sur la même figure, une droite* (L) *qui perce* (P) *en un point* B *et qui ne coupe pas* xy.

3° *Peut-on tracer une droite* (Δ) *qui coupe* xy *et qui ne coupe pas* (P)?

919. *Représenter un plan* (P) *et le plan* (Q) *déterminé par une droite* xy *située dans* (P) *et par un point* A *extérieur à* (P).

920. *Représenter deux plans* (P) *et* (Q) *sécants et une droite* (D) *qui les perce respectivement en* A *et* B.

921. *Représenter trois demi-droites* Ox, Oy, Oz *issues d'un même point* O *et non situées dans un même plan, et un plan* (P) *qu'elles percent respectivement en trois points* A, B, C.

II. DROITES ET PLANS PARALLÈLES

222. Droites parallèles.

☆ ***On dit que deux droites sont* parallèles *pour exprimer :***
1° qu'elles sont situées dans un même plan,
2° qu'elles n'ont aucun point commun.

Il est essentiel de préciser que les deux droites sont *dans un même plan* car nous avons vu qu'il existe dans l'espace des droites qui n'ont aucun point commun et qui ne sont pas dans un même plan.

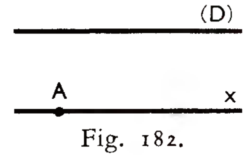


Fig. 182.

Soit une droite (D) et un point A non situé sur (D) (*fig. 182*). La droite (D) et le point A déterminent un plan (P) et, dans ce plan, on sait qu'on peut tracer par A une parallèle à (D) et une seule.

▪ THÉORÈME. — ***Par un point donné A, non situé sur une droite donnée (D), il passe une droite et une seule parallèle à (D).***

Comme en géométrie plane, nous dirons la parallèle à (D), passant par A.

223. Propriétés des droites parallèles. — Nous observons dans la salle de classe les arêtes parallèles AA′, BB′, CC′ coupées par le plan ABC du parquet (*fig. 183*).

Ces droites sont deux à deux dans un même plan. Les trois plans AA′BB′, AA′CC′, BB′CC′ sont distincts.

Le plan ABC coupe AA′ en A, BB′ en B, CC′ en C. Nous nous contenterons de cette observation pour conclure que :

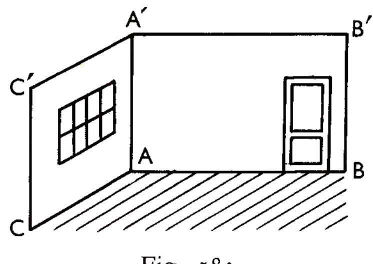


Fig. 183.

▪ ***1° Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.***
2° Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

224. Droite parallèle à une droite d'un plan. — Soit, dans un plan (P), une droite AB. Par un point M, non situé dans (P), on peut tracer la parallèle MN à AB. Les droites MN et AB déterminent un plan (Q). Si le plan (P) coupait MN, il couperait aussi la parallèle AB à MN d'après ce qui a été dit au n° 223; mais cela est impossible puisqu'il la contient. On ne peut donc envisager que l'une ou l'autre des deux circonstances suivantes :

1° (P) contient MN;

2° (P) et MN n'ont aucun point commun.

La première circonstance est impossible puisque, par hypothèse, M n'est pas dans (P). C'est donc la 2e circonstance qui est réalisée; (P) et MN n'ont pas de point commun *(fig. 184)*.

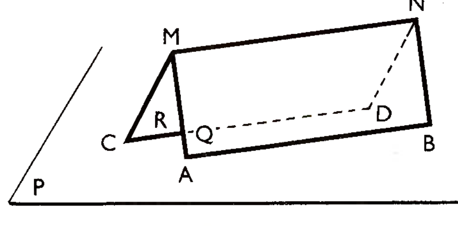


Fig. 184.

☆ DÉFINITION. — ***On dit qu'une droite (D) est parallèle à un plan (P) — ou que le plan (P) est parallèle à la droite (D) — pour exprimer que la droite et le plan n'ont pas de point commun.***

L'étude faite démontre l'existence d'une droite parallèle à un plan et permet d'énoncer :

▪ THÉORÈME. — ***Toute droite parallèle à une droite d'un plan est parallèle au plan (ou contenue dans ce plan).***

Il existe une infinité de droites parallèles à un plan donné. Il suffit de choisir un point M, non situé dans le plan, et de tracer par M la parallèle à une droite arbitraire du plan.

Réciproquement, la droite MN parallèle à (P) et un point C du plan (P) déterminent un plan (R) qui coupe (P) suivant une droite CD. Les droites MN et CD sont dans un même plan, le plan (R); elles n'ont pas de point commun, puisque MN et (P) n'en ont pas. Elles sont donc parallèles.

▪ ***Si une droite est parallèle à un plan (P), tout plan passant par cette droite et coupant (P), le coupe suivant une parallèle à la droite.***

• REMARQUE. La droite CD est l'unique parallèle à MN et passant par C. Nous avons vu qu'elle est dans le plan (P).

▪ ***Si une droite est parallèle à un plan, la parallèle à cette droite et passant par un point du plan est contenue dans ce plan.***

225. Constructions. — 1° *Par un point A, construire des plans parallèles à une droite* (D).

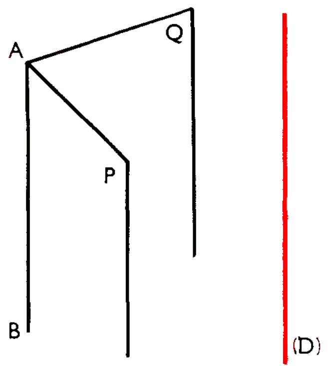


Fig. 185.

D'après la remarque précédente, les plans cherchés contiennent la parallèle AB à (D) (*fig. 185*). Réciproquement, tout plan passant par AB — sauf le plan contenant (D) — est parallèle à (D) puisqu'il contient une droite AB parallèle à (D) (Théorème n° 224).

▪ ***Par un point A, il passe une infinité de plans parallèles à une droite donnée (D); ils ont en commun la droite parallèle à (D) et passant par A.***

2° *Par une droite* (D), *faire passer un plan parallèle à une autre droite* (D′) *non parallèle à* (D).

Si un plan répond à la question, il doit contenir la droite (Δ′) parallèle à (D′), menée par un point A de (D) (*fig. 186*).

Réciproquement, les droites (D) et (Δ′) sont sécantes en A puisque (D) et (D′) ne sont pas parallèles. Elles déterminent donc un plan (P). Ce plan (P) contenant (Δ′), parallèle à (D′), est parallèle à (D′) ou bien contient (D′) (n° 224).

Il ne peut contenir (D′) que si (D) et (D′) sont dans un même plan. Si cette condition n'est pas réalisée, le plan (P) est donc parallèle à (D′).

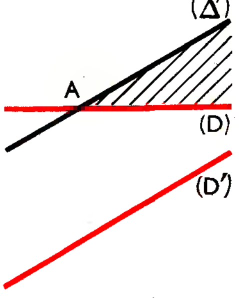


Fig. 186.

▪ ***Si deux droites ne sont pas dans un même plan, on peut faire passer par l'une d'elles un plan parallèle à l'autre.***

3° *Par un point donné* A, *construire un plan parallèle à deux droites données* (D) *et* (D′) *non parallèles.*

Si un plan répond à la question, il doit contenir la parallèle Ax à (D) et la parallèle Ay à (D′) (*fig. 187*). Réciproquement, Ax et Ay sont distinctes puisque (D) et (D′) ne sont pas parallèles. Elles déterminent un plan (P). Ce plan contenant Ax, parallèle à (D), est parallèle à (D) ou bien contient (D). De même, le plan (P) est parallèle à (D′) ou bien contient (D′).

▪ ***Par un point donné, il passe, en général, un plan parallèle à deux droites données non parallèles.***

Le plan xAy peut contenir (D) sans contenir (D′), il est alors parallèle à (D′).

Si (D) et (D′) sont deux droites sécantes d'un même plan (Q) et si A est dans ce plan (Q), le plan xAy est alors confondu avec (Q) car il contient (D) et (D′).

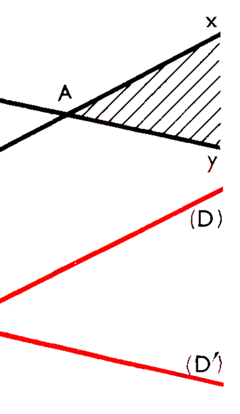


Fig. 187.

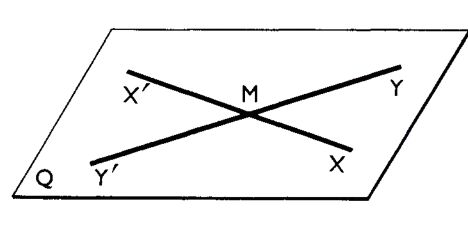
- **Applications.**

922. 1° *Représenter deux plans sécants* (P) *et* (Q) *et désigner par* (D) *leur droite commune.*
2° *Tracer une droite passant par un point* A *et parallèle à la fois aux plans* (P) *et* (Q).

923. 1° *Représenter deux droites parallèles* (D) *et* (D′).
2° *Représenter : le plan* (P) *passant par* (D) *et un point* O *donné; le plan* (P′) *passant par* (D′) *et le point* O.
3° *Comment se coupent les plans* (P) *et* (P′)*? Faire la figure.*

III. PLANS PARALLÈLES

226. Plans parallèles. — Soit deux droites sécantes $x'Ax$ et $y'Ay$. Elles déterminent un plan (P) (*fig. 188*). Par un point M, non situé dans (P), traçons la parallèle X′MX à $x'Ax$ et la parallèle Y′MY à $y'Ay$. Elles déterminent un plan (Q), distinct de (P), puisque M n'est pas dans (P). Si les plans (P) et (Q) avaient un point commun, ils auraient une droite commune (n° 221).



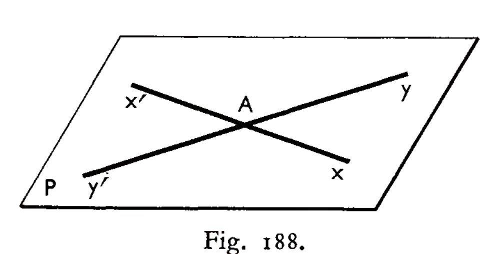


Fig. 188.

Or le plan (Q) contenant X′MX, parallèle à (P), l'intersection de (P) et de (Q) devrait être parallèle à X′MX; de même, elle devrait être parallèle à Y′MY. C'est impossible puisque X′MX et Y′MY sont sécantes. Les plans (P) et (Q) n'ont donc pas de point commun.

☆ DÉFINITION. — ***On dit que deux plans sont parallèles pour exprimer qu'ils n'ont aucun point commun.***

L'étude précédente justifie cette définition puisqu'elle démontre l'existence d'un plan parallèle à un plan donné. Elle permet, en outre, d'énoncer :

- THÉORÈME. — ***Si, par un point non situé dans un plan (P), on trace deux droites respectivement parallèles à deux droites concourantes de ce plan, ces droites déterminent un plan (Q) parallèle au plan (P).***

EXEMPLES. Observer dans la salle de classe, deux plans parallèles et indiquer les deux couples de droites respectivement parallèles qui les déterminent.

227. Conséquences.

- ***1° Si deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre, puisqu'elle ne peut le rencontrer.***

Par exemple, toute droite tracée sur le parquet est parallèle au plafond.

2° Soit (P) et (Q) deux plans parallèles. Appelons (D) une droite de (P) et A un point de (Q) (*fig. 189*). Le plan (R) défini par (D) et A coupe (P) suivant (D) et coupe (Q) suivant une droite (D') passant par A. Les droites (D) et (D') sont dans un même plan : le plan (R); elles n'ont aucun point commun, car elles sont dans deux plans parallèles (P) et (Q) : elles sont donc parallèles.

- ***Les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont deux droites parallèles*** (*fig. 190*).

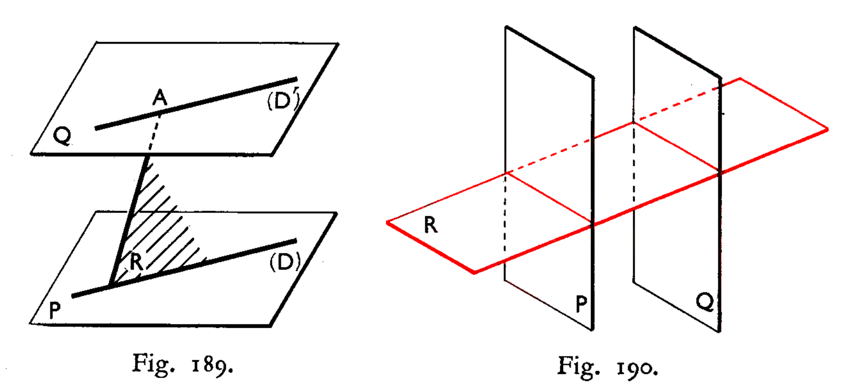


Fig. 189. Fig. 190.

3° Soit à construire par un point M, non situé dans un plan (P), un plan parallèle à (P). L'étude faite au n° 226 donne la solution du problème. On trace dans (P) deux droites sécantes $x'Ax$ et $y'Ay$ et on trace X'MX parallèle à

$x'x$ et Y′MY parallèle à $y'y$. Les droites X′X et Y′Y déterminent un plan (Q) parallèle à (P).

On peut démontrer, nous l'admettrons, que ce plan est unique, c'est-à-dire que l'on trouve toujours le même plan quelles que soient les deux droites choisies dans le plan (P). On dira : le plan parallèle à (P), passant par A.

▪ ***Par un point non situé dans un plan (P), il passe un plan parallèle à (P) et un seul.***

● REMARQUES. Il résulte de ce qui précède que :

a) *Deux plans distincts parallèles à un troisième sont parallèles entre eux,* sinon, par un de leurs points communs il passerait deux plans parallèles au troisième.

b) *Si deux plans* (P) *et* (Q) *sont parallèles, tout plan* (R) *qui coupe* (P) *coupe* (Q); sinon, par la droite d'intersection de (R) et de (P), il passerait deux plans parallèles à (Q).

228. Droites parallèles coupées par des plans parallèles. — Soit deux droites parallèles $x'x$ et $y'y$ coupées par le plan (P) en A et B et par le plan (Q) parallèle à (P) en C et (D) (*fig. 191*). Les droites $x'x$ et $y'y$ sont dans un même plan (R).

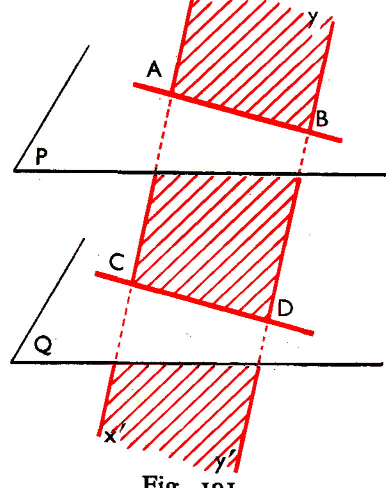


Fig. 191.

Les droites AB et CD sont les intersections de (R) avec les plans parallèles (P) et (Q). Les droites AB et CD sont donc parallèles (nº 227).

Par suite ABCD est un parallélogramme et l'on a :

$$AC = BD.$$

▪ THÉORÈME. — ***Deux plans parallèles découpent sur deux droites parallèles des segments égaux.***

● **Applications.**

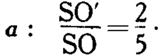
924. *Représenter deux plans parallèles* (P) *et* (Q) *et une droite qui les perce respectivement en* A *et* B.

925. *On veut scier un madrier à 4 faces parallèles deux à deux. On trace le segment* AB *sur une face et le segment* BC *sur la face suivante* (fig. 192). *Tracer les deux autres segments qui limitent la section plane.*

926. (P) *et* (P′) *sont deux plans parallèles et* S *est un point qui n'est situé ni dans* (P) *ni dans* (P′). *Soit* O *et* A *deux points de* (P) *tels que* OA = 4 cm. *La droite* SO *perce* (P) *en* O′ *et la droite* SA *perce* (P′) *en* A′.

1° *Faire la figure.*

2° *Calculer la mesure du segment* O′A′ *sachant que l'on a :*



$$\frac{SO'}{SO} = \frac{2}{5}.$$

Fig. 192.

927. *Soit un triangle isocèle* ABC *de base* BC *et un point* S *non situé dans le plan* (P) *du triangle. Les droites* SA, SB, SC *coupent respectivement en* A′, B′, C′ *un plan* (P′), *parallèle au plan* (P) *et ne contenant pas* S. *Démontrer que le triangle* A′B′C′ *est isocèle (Utiliser l'exercice précédent).*

928. *Soit un carré* ABCD *et un point* S *non situé dans le plan* (P) *du carré. Les droites* SA, SB, SC, SD *coupent respectivement en* A′, B′, C′, D′ *un plan* (P′), *parallèle au plan* (P) *et ne contenant pas* S.

1° *Faire la figure.*

2° *Démontrer que le quadrilatère* A′B′C′D′ *est un carré.*

EXERCICES ET PROBLÈMES

NOTE : *Dans tous les problèmes de construction dans l'espace il n'est pas question, pour le moment, de construire les éléments comme en géométrie plane. On suppose que :*

— un plan est déterminé comme il a été dit au n° 216;

— l'on sait construire l'intersection d'une droite et d'un plan, ou de deux plans;

— l'on sait faire, dans un plan donné, les constructions connues de la géométrie plane.

Ces conventions se traduisent par des tracés faits, à priori, en perspective, sur des figures dessinées le plus clairement possible.

Problème résolu. — 1° Démontrer qu'il existe, en général, une droite et une seule passant par un point donné A et rencontrant deux droites données (D) et (D′).

2° Examiner le cas où les deux droites données sont dans un même plan.

SOLUTION.

1° *Si une droite* (X), *passant par* A, *rencontre* (D) *en* B *et* (D′) *en* B′, *cette droite appartient au plan* (P) *défini par* A *et par* (D), *et aussi au plan* (P′) *défini par* A *et* (D′). *Si* A *n'est situé ni sur* (D) *ni sur* (D′) *ces plans sont bien déterminés.*

Réciproquement, *les plans* (P) *et* (P′) *ne sont pas parallèles puisqu'ils contiennent* A; *ils ne sont pas confondus si* (D) *et* (D′) *ne sont pas dans un même plan. Ils se coupent donc suivant une droite. Cette droite passe par* A *et elle est dans un même plan* (P) *avec* (D) *et dans un même plan* (P′) *avec* (D′). *Elle convient donc si elle n'est pas parallèle à l'une d'elles (fig. 193).*

Fig. 193.

Cas particulier : *Si* A *est sur* (D), *toutes les droites du plan* (P′) *qui passent par* A *(sauf la parallèle à* (D′)*) conviennent. Le problème admet alors une infinité de solutions.*

2° *Si* (D) *et* (D′) *sont dans un plan* (Q) *elles peuvent être ou sécantes en un point* C *ou parallèles.*

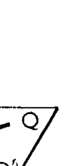
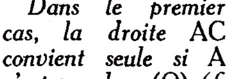
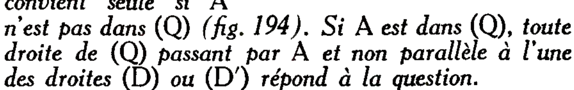


Fig. 194.



Dans le premier cas, la droite AC *convient seule si* A *n'est pas dans* (Q) *(fig. 194). Si* A *est dans* (Q), *toute droite de* (Q) *passant par* A *et non parallèle à l'une des droites* (D) *ou* (D′) *répond à la question.*



Dans le deuxième cas, le problème est impossible si A *n'est pas dans le plan des deux droites. Il admet une infinité de solutions si* A *est dans le plan.*



929. — On suppose que trois droites sont concourantes et ne sont pas dans un même plan. Combien de plans déterminent-elles deux à deux?

930. — On suppose que quatre points A, B, C, D non situés dans un même plan sont tels que trois d'entre eux ne sont pas alignés. Combien de droites déterminent-ils deux à deux? Combien de plans déterminent-ils trois à trois? Quelles sont les intersections de ces plans? Faire une figure claire.

931. — Soit (D) et (D′) deux droites quelconques de l'espace. On désigne par A un point de (D), par A′ un point de (D′). Déterminer l'intersection du plan défini par (D′) et A et du plan défini par (D) et A′.

932. — On donne deux droites (D) et (D′) non situées dans un même plan. On désigne par A et B deux points de (D), par A′ et B′ deux points de (D′). Démontrer que les droites AA′ et BB′ ne sont pas dans un même plan.

933. — Deux triangles ABC et BCD ont un côté commun BC et ne sont pas dans un même plan. On trace une droite qui coupe le segment AB en M et le segment AC en N. Soit P un point du segment CD.

1° Déterminer l'intersection des plans BCD et MNP.

Examiner le cas particulier où MN est parallèle à BC.

2° Cette intersection varie-t-elle lorsqu'on fait tourner le triangle ABC autour de BC?

934. — Deux triangles ABC et BCD ont un côté commun BC et ne sont pas situés dans un même plan. Soit M, N, P, Q les milieux respectifs des côtés AB, AC, CD, BD.

1° Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

2° Démontrer que la droite BC est parallèle au plan MNP.

935. — Sx, Sy, Sz sont trois demi-droites de même origine, non situées dans un même plan. Un plan (P) les coupe respectivement en A, B, C. Un plan (P′), parallèle à (P) les coupe respectivement en A′, B′, C′. Démontrer que les triangles ABC, A′B′C′ sont semblables.

936. — Soit un triangle ABC et un point O non situé dans le plan du triangle. On trace par A, par B et par C respectivement les droites (D), (D′), (D″) parallèles et non situées dans le plan du triangle. Les plans O, (D); O, (D′); O, (D″) coupent le plan du triangle suivant trois droites. Démontrer que ces droites sont concourantes.

937. — On donne trois droites (D_1), (D_2), (D_3) dont deux (D_1) et (D_2) seulement sont dans un même plan. Construire une droite (X) rencontrant les trois droites (D_1), (D_2), (D_3). (¶ *On distinguera deux cas suivant que* (D_1) *et* (D_2) *sont sécantes ou parallèles.*)

★ ★

938. — Quatre droites distinctes sont telles que deux quelconques d'entre elles se coupent. Que peut-on dire de ces droites?

939. — (D_1) et (D_2) sont deux droites quelconques de l'espace.

(D) et (D′) sont deux droites parallèles.

1° Construire une droite qui rencontre les quatre droites (D_1), (D_2), (D) et (D′).

2° Étudier les cas particuliers.

940. — Un bloc de pierre a six faces dont les plans sont parallèles deux à deux (*fig. 195*). On désire le couper suivant une section plane dont on a tracé deux côtés consécutifs AB et BC. En supposant que A, B, C sont les milieux des arêtes NP, NS et RS, on demande de déterminer les autres côtés de la section. (¶ *Utiliser le point* O *où la droite* BC *coupe la droite* MR.)

Fig. 195.

941. — On donne un quadrilatère plan ABCD et un point O non situé dans le plan du quadrilatère. On joint OA, OB, OC, OD.

1° Combien ces droites déterminent-elles de plans lorsqu'on les associe deux à deux?

2° Construire les droites d'intersection de ces plans pris deux à deux. En quels points ces droites percent-elles le plan ABCD?

★ ★ ★

942. — On donne deux droites concourantes $x'Ax$ et $y'Ay$ et un plan (P) qui les coupe respectivement en B et C. Tracer par A une droite $z'Az$ telle que les plans xAz et yAz soient coupés par (P) suivant deux droites parallèles.

943. — Deux plans (P) et (P′) se coupent suivant une droite (D). Soit ABC un triangle tracé dans (P) et A′B′C′ un triangle tracé dans (P′). Ces triangles sont supposés tels que les droites AB et A′B′ se coupent en γ sur (D), BC et B′C′ en α sur (D), AC et A′C′ en β sur (D).

1° Démontrer que les droites AA′ et BB′ sont dans un même plan.

2° Étudier la disposition des droites AA′, BB′, CC′.

944. — (D_1), (D_2), (D_3) sont trois droites parallèles. Soit A et A′ deux points de (D_1), B et B′ deux points de (D_2), C et C′ deux points de (D_3).

1° Démontrer que les droites AB et A′B′ sont dans un même plan. On suppose qu'elles se coupent en γ. De même BC et B′C′ se coupent en α, AC et A′C′ se coupent en β.

2° Étudier la disposition des points α, β, γ.

945. — On donne quatre points A, B, C, D sommets d'un tétraèdre.

1° Combien y a-t-il de plans passant par deux d'entre eux et le milieu du segment joignant les deux autres?

2° Quelle est l'intersection du plan passant par AD et le milieu M de BC avec le plan passant par BC et le milieu I de AD?

3° Quelle est l'intersection du plan (P) passant par AD et le milieu M de BC avec le plan (Q) passant par BD et le milieu N de AC?

4° Démontrer que si (R) désigne le plan passant par CD et le milieu L de AB, les trois plans (P), (Q), (R) ont une droite commune.

946. — Soit un trétraèdre ABCD. On désigne par M le milieu AB et par N le milieu de AC. Un plan (P), contenant la droite MN, coupe la droite BD en M′ et la droite CD en N′.

1° Comparer les directions des droites BC et M′N′.

2° Démontrer que le milieu K de M′N′ se trouve sur l'une des médianes du triangle BCD.

3° Démontrer que les droites MM′ et NN′ se coupent, en général, en un point I aligné avec A et D.

CHAPITRE XIV

DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

I. ANGLE DE DEUX DROITES

229. Angles dont les côtés sont respectivement parallèles et de même sens. — Soit deux angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x'Ay'}$ dont les côtés sont respectivement parallèles et de même sens : $A'x'$ parallèle à Ax et de même sens que Ax; $A'y'$ parallèle à Ay et de même sens que Ay;

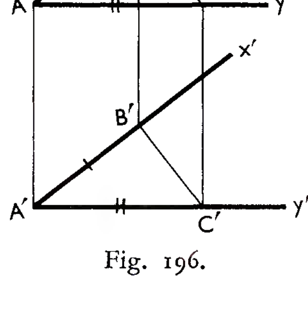


Fig. 196.

S'ils sont dans un même plan, on sait que ces angles sont égaux.

S'ils sont dans des plans distincts, ces plans sont parallèles (n° 226).

Marquons sur Ax et $A'x'$ des points B et B' tels que :

$$AB = A'B'$$

et sur Ay et $A'y'$ des points C et C' tels que :

$$AC = A'C'.$$

Traçons AA', BB', CC', BC, B'C' (*fig. 196*).

1° Le quadrilatère ABB'A' est un parallélogramme (deux côtés opposés AB et A'B' égaux, parallèles et de même sens). De même le quadrilatère ACC'A' est un parallélogramme.

2° Par suite, les segments AA' et BB' sont égaux et parallèles; de même AA' et CC'. Le quadrilatère convexe BCC'B' est donc un parallélogramme (deux côtés opposés BB' et CC' égaux et parallèles) et l'on a :

$$BC = B'C'.$$

3° Les triangles ABC et A'B'C' ont alors leurs trois côtés respectivement égaux. Ils sont égaux (3e cas d'égalité) et l'on a :

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \quad \text{ou} \quad \widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'}.$$

▪ THÉORÈME. — ***Si deux angles ont leurs côtés respectivement parallèles et de même sens, ils sont égaux.***

• REMARQUE. Si, au lieu de deux demi-droites, on trace deux droites (D) et (Δ) sécantes en A et deux droites (D') et (Δ') sécantes en A' et respectivement parallèles à (D) et à (Δ), les angles formés en A et en A' sont deux à deux égaux (*fig. 197*). Si l'on choisit un quelconque des angles $\widehat{A}$ et un quelconque des angles $\widehat{A'}$, ils sont *égaux* ou *supplémentaires* suivant la façon dont on les associe. La règle, sur le sens des côtés respectivement parallèles, est la même qu'en géométrie plane.

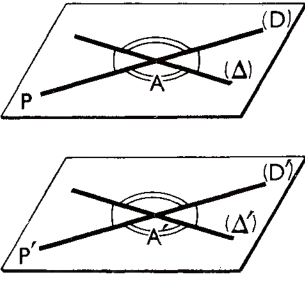


Fig. 197.

230. Angle de deux droites. — Soit deux droites quelconques de l'espace (D) et (D') (*fig. 198*). Si par un point A quelconque nous traçons les parallèles $x'Ax$ à (D) et $y'Ay$ à (D'), les angles formés par $x'x$ et $y'y$ ne dépendent pas, d'après ce qui précède, du choix du point A. Ce fait permet de donner la définition suivante :

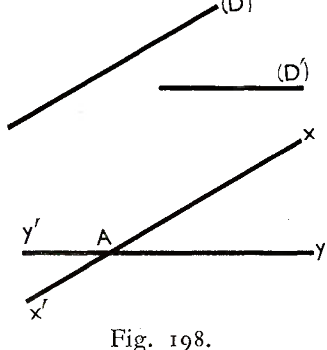


Fig. 198.

☆ DÉFINITION. — ***On appelle* angle de deux droites *de l'espace, l'un quelconque des angles limités par les parallèles à ces droites passant par un point quelconque de l'espace.***

Dans le cas particulier où les droites sont parallèles, on peut dire que leur angle est nul ou plat.

L'usage de la notion d'angle de deux droites conduit à dire, lorsque deux droites sont parallèles ou confondues, qu'elles ont la *même direction*.

• REMARQUE. Soit deux demi-droites OX et O'X'. Traçons par un point A, deux demi-droites Ax et Ax' : Ax parallèle à OX et de même sens ; Ax' parallèle à O'X'

et de même sens. On définit ainsi un angle $\widehat{xAx'}$ dont la mesure est indépendante du choix du point A (*fig. 199*). C'est l'angle des demi-droites OX et O'X'.

231. Droites perpendiculaires. — Si l'un des angles de deux droites est un angle droit, les trois autres sont aussi droits.

> ☆ DÉFINITION. — ***On dit que deux droites de l'espace sont perpendiculaires pour exprimer que l'un de leurs angles est droit.***

On emploie aussi, au lieu du mot « perpendiculaires », le mot « rectangulaires » ou « orthogonales ». Nous ne ferons aucune différence entre ces trois expressions. Dans le cas où nous voudrons préciser que les droites considérées ont un point commun, nous le dirons expressément.

Il résulte immédiatement de la définition de l'angle de deux droites que *si deux droites sont perpendiculaires, toute parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

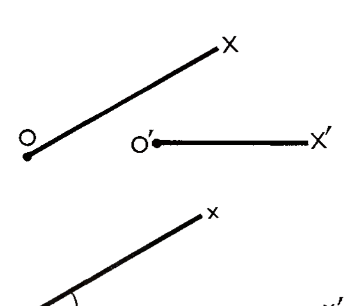


Fig. 199.

● **Applications.**

947. — *Parmi les arêtes d'une boîte de cartes de visite rechercher toutes les couples d'arêtes orthogonales, en distinguant celles qui sont sécantes et celles qui ne le sont pas.*

948. — 1° *Dans un cube (étudié en sixième) on trace les diagonales des faces. Combien y en a-t-il en tout ? (¶ Rép. : 12).*
2° *On numérotera les 12 arêtes et les 12 diagonales ainsi obtenues.*
Associer ces 24 droites deux à deux de façon que chaque couple soit composée de deux droites orthogonales.
Faire une figure très claire.

949. — *Sur chacune des quatre faces d'un clocher il y a un cadran d'horloge.*
1° *Quel est, à 14 heures, l'angle de la grande aiguille du cadran de la face Sud avec la petite aiguille du cadran de la face Ouest ?*
2° *Quel est, à 15 heures, l'angle de la petite aiguille du cadran de la face Est avec la grande aiguille du cadran de la face Nord ?*
3° *Quel est, à 18 h 10 mn, l'angle des grandes aiguilles des cadrans des faces Nord et Sud ?*

II. DROITES ET PLAN PERPENDICULAIRES

232. Droite perpendiculaire à un plan. — Observons une porte qui s'ouvre dans diverses positions possibles (*fig. 200*). La porte a la forme d'un rectangle et le bord inférieur de la porte est perpendiculaire à la ligne des gonds AB. Ainsi, les droites AC, AD, AE... sont perpendiculaires à AB en A. Nous ne pouvons plus dire, comme lorsqu'il s'agissait d'une figure plane, que par un point A pris sur la droite AB on ne peut tracer qu'une perpendiculaire à cette droite. Il en existe une infinité.

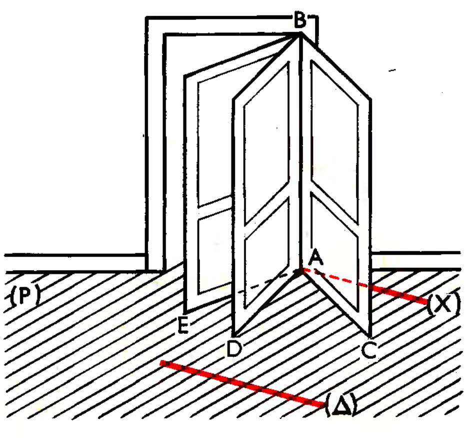
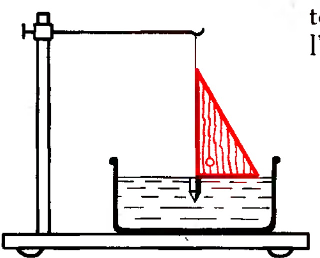


Fig. 200.

Quand la porte s'ouvre, son bord inférieur reste en contact avec le parquet de la salle : nous avons donc l'exemple d'*une droite* AB *perpendiculaire* à toutes les droites passant par son *pied* A dans le plan (P) et, par suite, à toute autre droite (Δ) du plan (P) puisque (Δ) est parallèle à une droite (X) de (P), passant par A. L'existence d'une telle droite peut être démontrée, nous l'admettrons pour le moment.


Fig. 201.

☆ DÉFINITION. — ***On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan pour exprimer qu'elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan.***
On dit aussi que le plan est perpendiculaire à la droite.

EXEMPLE. On peut vérifier, à l'aide d'une équerre, qu'un fil à plomb suspendu au-dessus d'une cuvette pleine d'eau appartient à une droite (*verticale*) perpendiculaire au plan (*horizontal*) de la surface libre de l'eau (*fig. 201*).

233. Détermination d'une perpendiculaire à un plan. — 1° Si, par un point A d'un plan (P), on pouvait tracer deux perpendiculaires Ax et Ay à ce plan, le plan xAy couperait le plan (P) suivant une droite Az (*fig. 202*). Dans le plan xAy, il y aurait deux perpendiculaires en A à Az; c'est impossible. La même démonstration s'applique si A n'est pas dans le plan.

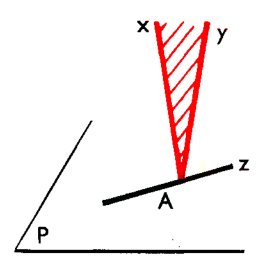


Fig. 202.

▪ ***La perpendiculaire à un plan, menée par un point, est unique.***

On dit : par un point, je trace | la | perpendiculaire à un plan.

2° Appliquons le côté AB de l'angle droit d'une équerre sur le plan (P). L'autre côté de l'angle droit AC est perpendiculaire à AB. Ainsi, il existe une infinité de droites perpendiculaires à AB en A mais une seule de ces droites est perpendiculaire au plan (P). Une droite peut donc être perpendiculaire à une droite d'un plan sans être perpendiculaire au plan (*fig. 203*). Par contre, si deux équerres ont un côté de l'angle droit AD commun, les autres côtés AB et AC n'étant pas alignés, la droite AD est perpendiculaire au plan (*fig. 204*). C'est une constatation dont nous nous contenterons dans cette classe. On peut démontrer, et nous admettrons, le théorème suivant :

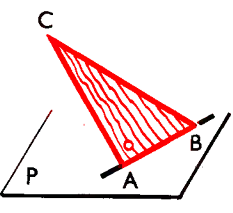


Fig. 203.

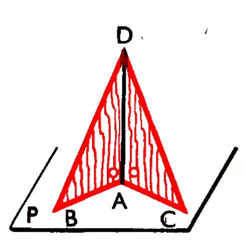


Fig. 204.

▪ THÉORÈME. — ***Si une droite est perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan, elle est perpendiculaire à toute droite du plan.***

EXEMPLE. Ce théorème justifie l'emploi d'une équerre à trois branches pour vérifier si une droite est perpendiculaire à un plan (*fig. 205*).

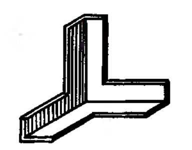


Fig. 205.

234. Construction d'une perpendiculaire à un plan. — 1° Soit à mener, d'un point O, pris hors d'un plan (P), la perpendiculaire à ce plan (*fig. 206*). Traçons, dans (P), une droite (D) quelconque. Projetons O en A sur (D),

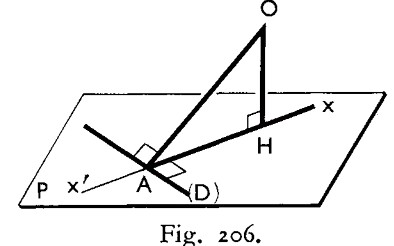


Fig. 206.

puis par A, traçons dans (P) la perpendiculaire $x'Ax$ à (D). Le plan $Ox'x$ contient deux droites OA et $x'x$ perpendiculaires à (D) : donc (D) est perpendiculaire au plan $Ox'x$. Traçons la perpendiculaire OH à $x'x$; OH est perpendiculaire à (D) puisque (D) est perpendiculaire à toute droite du plan $Ox'x$. En définitive, OH est perpendiculaire à deux droites sécantes $x'x$ et (D) du plan (P); OH est perpendiculaire au plan (P). Nous savons que cette droite est unique.

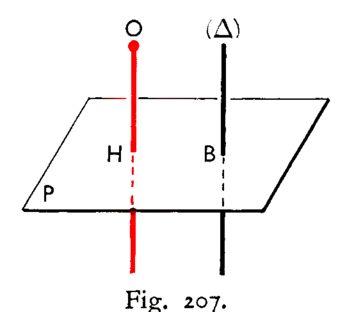


Fig. 207.

2° Si la droite OH est perpendiculaire au plan (P), toute parallèle à cette droite est perpendiculaire au plan (P) puisqu'elle forme les mêmes angles que OH avec les droites du plan. Par suite, pour tracer par un point B du plan (P) la perpendiculaire au plan, il suffit de mener par B la parallèle à une droite OH déjà tracée et perpendiculaire à (P) *(fig. 207)*.

D'ailleurs, par B, on ne peut tracer qu'une seule droite parallèle à OH et par suite : *deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.*

235. Construction d'un plan perpendiculaire à une droite. — Soit à faire passer, par un point O, un plan perpendiculaire à une droite AB.

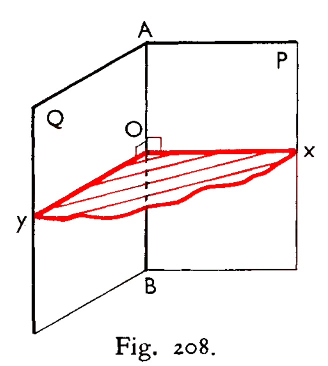


Fig. 208.

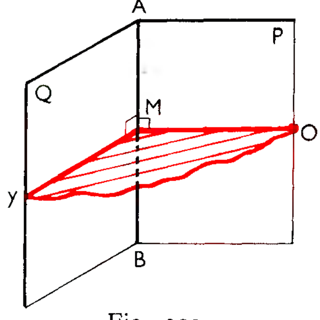


Fig. 209.

1° *Le point* O *est sur la droite* AB (*fig.* 208). On fait passer par AB deux plans (P) et (Q). Dans chaque plan, on trace par O les perpendiculaires Ox, Oy à AB. Elles déterminent le plan xOy. Ce plan est perpendiculaire à AB.

2° *Le point* O *n'est pas situé sur* AB (*fig.* 209). On fait passer par AB deux plans (P) et (Q) dont l'un, (P), contient O. On trace dans le plan (P) la perpendiculaire OM à AB et dans le plan (Q) la perpendiculaire My à AB. Le plan OMy est perpendiculaire à AB.

Ce tracé peut être exécuté sur deux murs, passant par une même arête. Le plan passant par O et perpendiculaire à AB est *unique*, sinon il y aurait dans le plan (P) deux perpendiculaires à AB, passant par O. On dira donc [le] plan perpendiculaire à une droite, par un point.

Il en résulte que deux plans perpendiculaires à une même droite n'ont pas de point commun.

- ***Deux plans distincts perpendiculaires à une même droite sont parallèles.***

EXEMPLE. Le bord inférieur et le bord supérieur d'une porte rectangulaire décrivent deux plans parallèles, perpendiculaires à la ligne des gonds.

• REMARQUE. Soit (R) le plan, passant par O et perpendiculaire à la droite AB. Toute droite de ce plan est perpendiculaire à AB, en particulier, toute droite (D) passant par O et tracée dans (R). On voit ainsi que *par un point* O *on peut mener une infinité de droites perpendiculaires à une droite donnée.* A titre d'exercice de représentation, on fera les figures qui correspondent à ces explications en supposant 1° que le point O est sur AB, 2° que le point O n'est pas sur AB.

• Applications.

950. — *Justifier le tracé fait sur une planche par le menuisier pour obtenir une section perpendiculaire aux arêtes de la planche.*

951. — *On suppose qu'un plan* (P) *est perpendiculaire à une droite* (D) *et qu'une droite* (Δ) *est aussi perpendiculaire à* (D). *Que peut-on dire de* (P) *et de* (Δ)?

952. — *On donne un triangle isocèle* ABC *de base* BC *dont on connaît l'angle* $\widehat{A} = 120°$ *et le côté* AB = 8 *cm. On trace par* A *la perpendiculaire au plan du triangle. Trouver sur cette perpendiculaire un point* M *tel que l'angle* $\widehat{BMC}$ *soit droit. Calculer* MA, MB *et* MC.

953. — *Démontrer que si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre. Citer des exemples concrets.*

954. — *Démontrer que si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Citer des exemples concrets.*

955. — *Sur chacune des quatre faces d'un clocher il y a des cadrans d'horloge. A quelles heures (entre 14 h et 15 h) la grande aiguille du cadran de la face Nord est-elle perpendiculaire au plan de la face Est ?*

III. ANGLES DIÈDRES PLANS PERPENDICULAIRES

236. Dièdre.

☆ ***1° On appelle* angle dièdre — *ou* dièdre — *la portion d'espace limitée par deux demi-plans, ayant pour arête la même droite.***

2° La droite commune s'appelle l'*arête *du dièdre.

3° Les demi-plans s'appellent les* faces *du dièdre.

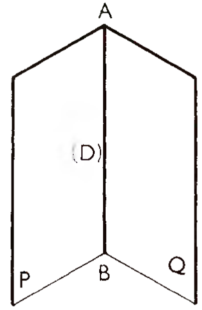


Fig. 210.

EXEMPLES. Un livre entrouvert fournit l'image d'un dièdre pourvu que l'on imagine les pages prolongées indéfiniment d'un même côté de l'arête.

Deux murs consécutifs d'une salle, un mur et le parquet d'une salle sont d'autres exemples.

On désigne parfois un dièdre par son arête lorsque cela ne peut prêter à aucune confusion. S'il y a confusion à craindre, on nomme une face, puis l'arête et l'autre face.

La figure *210* montre un dièdre. On dira :

le dièdre P, AB, Q

ou le dièdre P, D, Q ou encore P, Q.

• REMARQUES. I. La donnée des faces définit deux dièdres. Si, par rapport au plan de chaque face, le dièdre est tout entier du même côté que l'autre face, on dit que c'est un dièdre *saillant*, le seul que nous considérons sauf précision contraire. Dans le cas contraire, le dièdre est dit *rentrant*.

II. Dans le cas particulier où les deux faces sont confondues, le dièdre est nul. Si les deux faces sont des demi-plans opposés, on dit que le dièdre est plat.

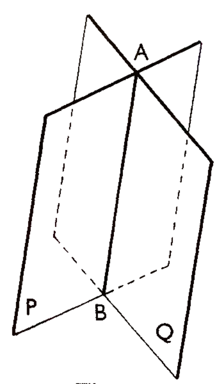


Fig. 211.

III. Deux plans sécants définissent quatre dièdres, deux à deux *opposés par l'arête* (*fig. 211*).

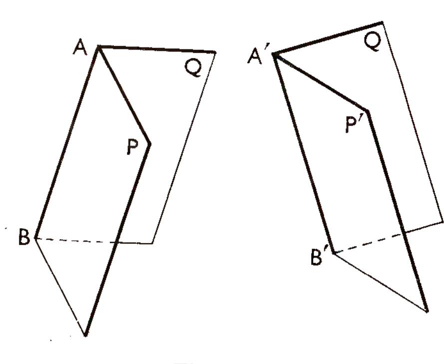


Fig. 212.

237. Dièdres égaux.

☆ ***Deux dièdres égaux sont deux dièdres que l'on peut faire coïncider.***

Soit les deux dièdres P, AB, Q et P, A′B′, Q′ (*fig. 212*); leur égalité exige que les faces coïncident deux à deux. A cet effet, on peut :

1° superposer (P′) et (P) d'une part, (Q′) et (Q) d'autre part;
ou bien, 2° superposer (P′) et (Q) d'une part, (Q′) et (P) d'autre part, à la manière d'un livre entrouvert dont on retourne l'arête (*fig. 213*).

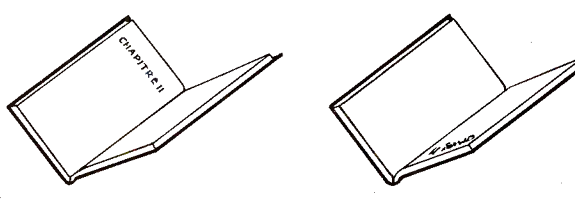


Fig. 213.

238. Angle rectiligne d'un dièdre. — Soit O un point de l'arête d'un dièdre (*fig. 214*). Par ce point, traçons, dans la face (P), la demi-droite Ox perpendiculaire à l'arête AB et, dans la face (Q), la demi-droite Oy perpendiculaire à l'arête AB. Les demi-droites Ox et Oy déterminent un angle $\widehat{xOy}$ dont le plan est perpendiculaire à l'arête (n° 231).

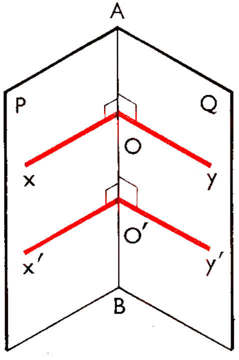


Fig. 214.

☆ DÉFINITION. — ***On appelle rectiligne d'un dièdre l'angle dont les côtés sont les perpendiculaires à l'arête, issues d'un point quelconque de cette arête, dans chacune des faces du dièdre.***

Cette définition n'est satisfaisante que si l'on prouve que l'angle obtenu ne dépend pas du choix du point O sur l'arête. Or si l'on fait les mêmes constructions à partir d'un autre point O′ de l'arête, on obtient un

angle $\widehat{x'Oy'}$. Les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'O'y'}$ ont leurs côtés respectivement parallèles et de même sens. Ils sont égaux.

■ ***Tous les rectilignes d'un dièdre sont égaux.***

239. Condition d'égalité de deux dièdres. — Supposons que deux dièdres P, AB, Q et P', A'B', Q' soient égaux (*fig. 215*). Construisons leurs rectilignes respectifs $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'O'y'}$.

Amenons les dièdres en coïncidence, la face (P) étant sur (P'), la face (Q) sur (Q'). Le point O vient en O_1 sur A'B'.

La demi-droite Ox vient coïncider avec la perpendiculaire O_1x_1, à A'B', tracée dans (P'), en O_1.

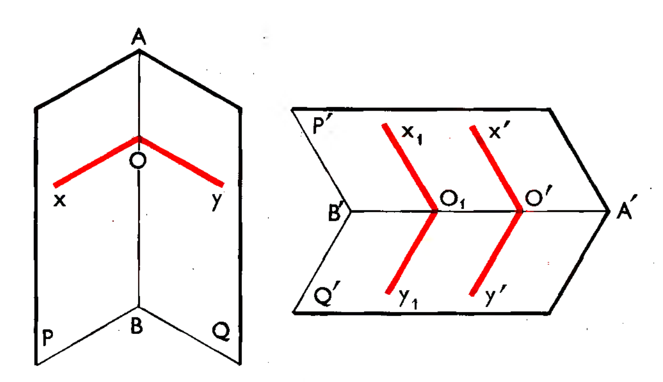


Fig. 215.

De même Oy vient coïncider avec la perpendiculaire O_1y_1, à A'B', tracée dans (Q'), en O_1.

Les angles $\widehat{x_1O_1y_1}$ et $\widehat{x'O'y'}$, rectilignes du dièdre P', A'B', Q' sont égaux.

Il en est donc de même des angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'O'y'}$.

Nous énoncerons :

■ THÉORÈME. — ***Si deux dièdres sont égaux, leurs rectilignes sont égaux.***

Réciproquement, supposons que deux dièdres P, AB, Q et P', A'B', Q' aient des rectilignes égaux : $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

Faisons coïncider les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'O'y'}$, Ox sur $O'x'$ et Oy sur $O'y'$. La droite AB, perpendiculaire en O au plan xOy, vient coïncider avec la droite A'B', perpendiculaire en O' au plan $x'O'y'$.

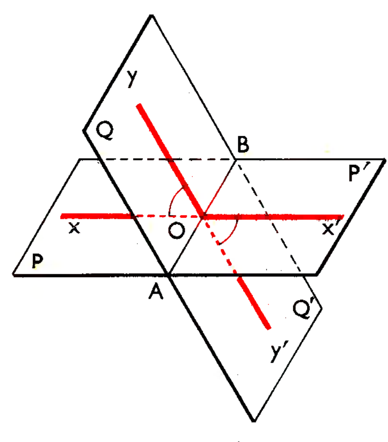


Fig. 216.

Le dièdre P, AB, Q est alors venu coïncider avec le dièdre P′, A′B′, Q′.

Nous énoncerons :

▪ RÉCIPROQUE. — ***Si les rectilignes de deux dièdres sont égaux, ces dièdres sont égaux.***

240. Dièdres opposés par l'arête. — Soit deux dièdres opposés par l'arête P, AB, Q et P′, AB, Q′ qui ont la même arête AB. Les demi-plans (P) et (P′) opposés ont pour frontière commune AB; de même les demi-plans (Q) et (Q′) (*fig. 216*).

Les rectilignes $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'Oy'}$ sont opposés par le sommet, ils sont égaux et, par suite, les dièdres sont égaux.

▪ ***Deux dièdres opposés par l'arête sont égaux.***

241. Bissecteur d'un dièdre. — Soit P, AB, Q un dièdre. En le coupant par un plan (H) perpendiculaire en O à AB, nous construisons un rectiligne $\widehat{xOy}$ de ce dièdre (*fig. 217*). Traçons la bissectrice Oz de cet angle. Elle détermine avec AB un demi-plan (R) de frontière AB. Les dièdres P, AB, R et R, AB, Q ont des rectilignes égaux $\widehat{xOz}$ et $\widehat{zOy}$. Ils sont égaux.

☆ DÉFINITION. — ***On appelle bissecteur d'un dièdre le demi-plan qui a la même arête que le dièdre et qui partage le dièdre en deux dièdres égaux.***

Nous venons de démontrer que :

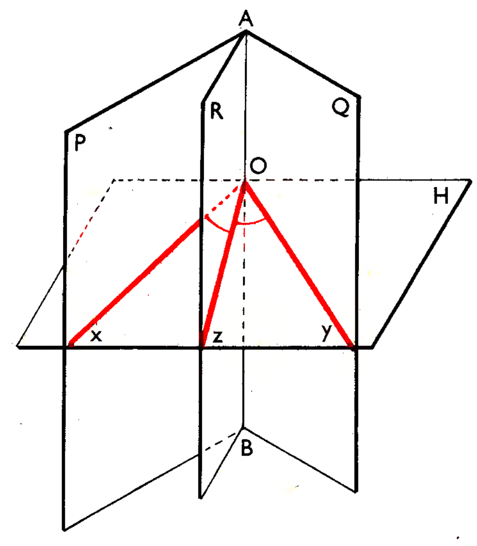


Fig. 217.

▪ ***Le bissecteur d'un dièdre est déterminé par l'arête du dièdre et la bissectrice d'un rectiligne du dièdre.***

242. Somme de deux dièdres. — On étend aux dièdres les définitions données en géométrie plane sur les angles.

☆ DÉFINITION. — ***1° On dit que deux dièdres sont adjacents pour exprimer qu'ils ont une arête commune et une face commune de part et d'autre de laquelle ils sont situés.***

Les rectilignes de deux dièdres adjacents sont deux angles adjacents (*fig. 218*).

Les faces non communes de deux dièdres adjacents sont appelées *faces extérieures.*

2° On appelle somme de deux dièdres adjacents le dièdre limité par les faces extérieures.

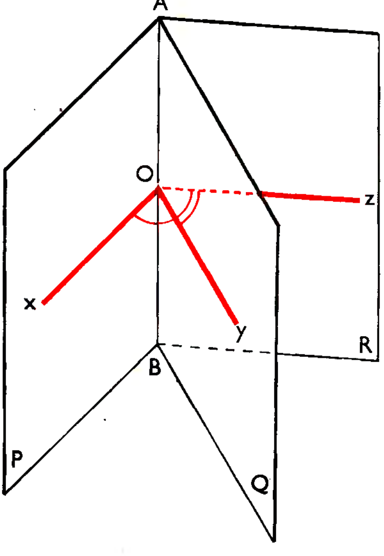


Fig. 218.

Sur la *figure 218* le dièdre P, AB, R est la *somme* des dièdres P, AB, Q et Q, AB, R. On écrit :

(1) P, AB, R = P, AB, Q + Q, AB, R.

Le dièdre Q, AB, R est la *différence* des dièdres P, AB, R et P, AB, Q :

(2) Q, AB, R = P, AB, R — P, AB, Q.

Le dièdre P, AB, R est *supérieur* à l'un des deux autres dièdres, P, AB, Q ou Q, AB, R. Chacun de ceux-ci est *inférieur* au dièdre P, AB, R.

Il est évident que *le rectiligne* $\widehat{xOz}$ *de la somme de deux dièdres est la somme des rectilignes* $\widehat{xOy}$ *et* $\widehat{yOz}$ *de ces deux dièdres.*

243. Mesure des angles dièdres. — La correspondance entre les dièdres et leurs rectilignes a fait choisir pour unité de dièdre, le dièdre qui admet pour rectiligne l'unité d'angle. L'unité légale étant l'angle droit, l'unité principale de dièdre est le *dièdre droit* qui est le dièdre dont le rectiligne est droit. Les sous-multiples sont les mêmes que ceux signalés en géométrie plane pour les angles (grades, décigrades...; degrés, minutes...). Un dièdre de 1 degré a pour rectiligne un angle de 1 degré; un dièdre double, triple... d'un autre aura un rectiligne double, triple... de celui du premier.

■ ***Un dièdre est mesuré par le même nombre de degrés (ou de grades) que son rectiligne.***

Pratiquement, on mesure un dièdre en mesurant son rectiligne. On utilise un angle matérialisé dont le plan est disposé perpendiculairement à l'arête et dont on fait varier l'ouverture. On emploie de cette façon la *fausse équerre* du menuisier ou de l'ajusteur (*fig. 219-220*) après avoir tracé, sur les faces, les perpendiculaires à l'arête. L'emploi du *calibre d'outilleur* pour la vérification de certains dièdres repose sur le même principe (*fig. 221*).

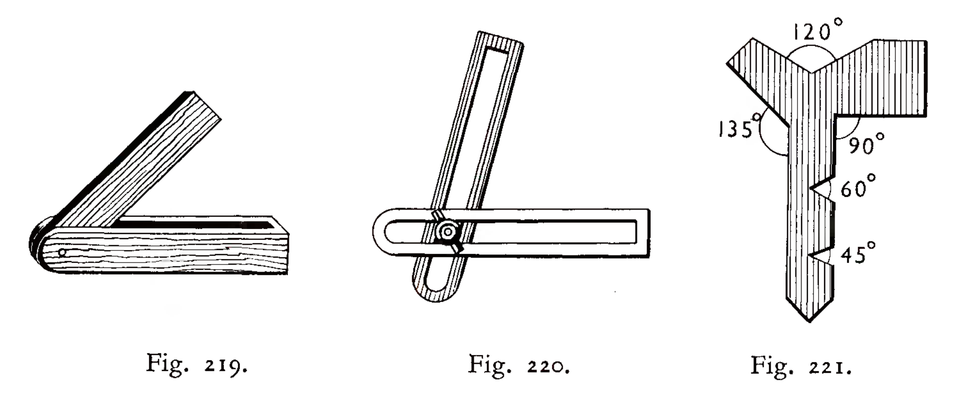


Fig. 219. Fig. 220. Fig. 221.

244. Conséquences. — Les principales définitions et propriétés données en géométrie plane pour les angles s'étendent aux dièdres. Nous nous bornerons aux énoncés :

1° un dièdre est *aigu* ou *obtus* si son rectiligne est aigu ou obtus;
2° deux dièdres sont *complémentaires* si leur somme est un dièdre droit;
3° deux dièdres sont *supplémentaires* si leur somme est un dièdre plat.

245. Plans perpendiculaires.

☆ ***On dit que deux plans sécants sont* perpendiculaires *pour exprimer que l'un des dièdres qu'ils forment est droit.***

Deux plans sécants forment quatre dièdres. Si le rectiligne de l'un de ces dièdres est droit, on sait que les rectilignes des autres dièdres sont aussi droits. Ces dièdres sont alors droits tous les quatre (*fig. 222*).

Soit deux plans perpendiculaires (P) et (Q) et le rectiligne $\widehat{xOy}$ de l'un des dièdres. Cet angle est droit. La droite $x'Ox$ est perpendiculaire à l'arête AB, par construction; elle est aussi perpendiculaire à $y'Oy$ par hypothèse. Elle est

donc perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (Q) et, par suite, elle est perpendiculaire au plan (Q).

▪ THÉORÈME. — ***Si deux plans sont perpendiculaires, l'un d'eux contient une droite perpendiculaire à l'autre.***

Réciproquement, supposons qu'un plan (P) contienne une droite CD perpendiculaire à un plan (Q) qu'elle perce en un point O (*fig. 223*). Les plans (P) et (Q) ne sont pas confondus puisque (P) contient CD qui n'est pas dans (Q). Les plans (P) et (Q), qui ont en commun le point O, se coupent donc suivant une droite AB qui passe par O. Traçons par O, dans (Q), la perpendiculaire EF à AB. La droite CD, perpendiculaire à (Q), est perpendiculaire

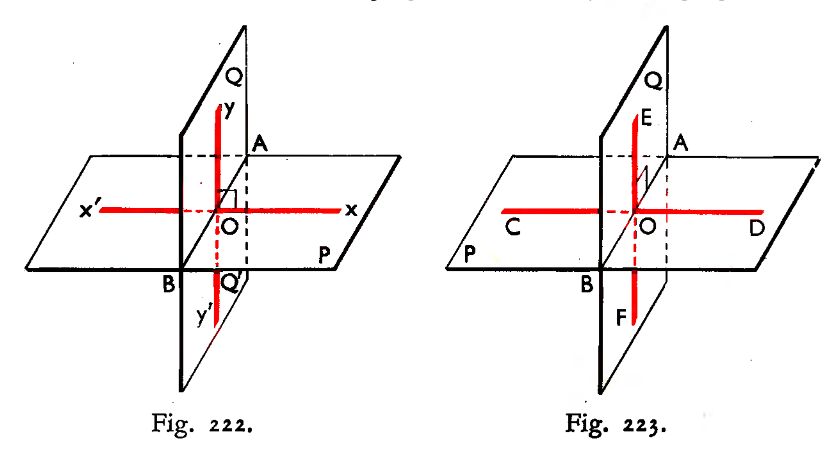


Fig. 222.

Fig. 223.

aux deux droites AB et EF de (Q). L'angle $\widehat{COE}$ est donc droit. Or il est le rectiligne du dièdre P, AB, Q qui est alors un dièdre droit. Donc :

▪ RÉCIPROQUE. — ***Si une droite est perpendiculaire à un plan (Q), tout plan passant par cette droite est perpendiculaire au plan (Q).***

Il en résulte que :

Par un point M *il passe une infinité de plans perpendiculaires à un plan donné* (P). Ils contiennent tous la perpendiculaire (Δ) menée par ce point M au plan (P) (*fig. 224*).

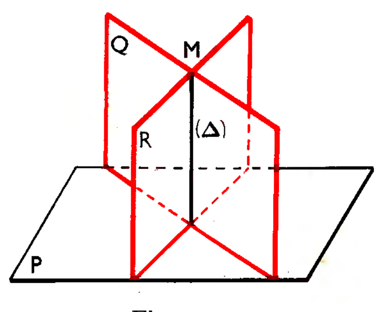


Fig. 224.

EXEMPLES. I. Les diverses positions d'une porte, autour de sa ligne des gonds sont perpendiculaires au parquet.

Tout plan passant par une verticale s'appelle un plan *vertical*. Puisqu'une verticale est perpendiculaire à un plan horizontal, il en résulte que *tout plan horizontal est perpendiculaire à tout plan vertical.*

II. Le parquet d'une salle et deux murs qui se coupent forment un système de trois plans perpendiculaires deux à deux. Le parquet est horizontal, les deux murs sont verticaux, l'arête commune à l'un des murs et au parquet est une *horizontale.* Ces trois plans perpendiculaires deux à deux se coupent deux à deux suivant trois droites telles que chacune d'elles est perpendiculaire aux deux autres. En ne conservant de ces trois droites que les demi-droites Ox, Oy, Oz on obtient une figure appelée *trièdre trirectangle* (*fig. 225*).

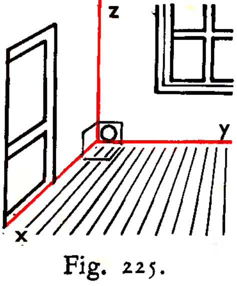


Fig. 225.

• **Applications.**

956. — *Deux plans parallèles* (P) *et* (Q) *sont coupés par un troisième* (R).
1° *Faire la figure.*
2° *Étudier les propriétés des dièdres formés et généraliser les théorèmes connus relatifs aux droites parallèles coupées par une sécante* (*dièdres alternes-internes, correspondant...*).

957. — 1° *Que peut-on dire des bissecteurs de deux dièdres opposés par l'arête ?*
2° *Étudier les bissecteurs de deux dièdres adjacents supplémentaires.*

958. — *On suppose que deux plans* (P) *et* (Q) *sont perpendiculaires à un plan* (R). *Peut-on en déduire que les plans* (P) *et* (Q) *sont parallèles ?*

959. — *Étant donné un dièdre droit et un de ses rectilignes* $\widehat{xOy}$, *étudier l'angle formé par les intersections des faces du dièdre avec un plan quelconque passant par* Ox.

EXERCICES ET PROBLÈMES



960. — Soit (P) le plan passant par le milieu O du segment AB et perpendiculaire à la droite AB.
1° Démontrer que tout point M de (P) est équidistant de A et de B.
2° Étudier la réciproque.

961. — Soit (R) le bissecteur du dièdre (P, AB, Q) et M un point de (R). Par M on trace la perpendiculaire à (R) qui coupe (P) en C et (Q) en D. Démontrer que MC = MD.

962. — Soit un dièdre (P, AB, Q) et un point M de l'espace. On trace par M la perpendiculaire x'Mx à (P) et la perpendiculaire y'My à (Q). Comparer l'angle des droites $x'x$ et $y'y$ au rectiligne du dièdre.

963. — Par les extrémités A et B du diamètre d'un cercle (C), on trace les perpendiculaires x'Ax et y'By au plan du cercle. Soit M un point du cercle, autre que A et B. Démontrer que les plans M$x'x$ et M$y'y$ sont perpendiculaires.

★ ★

964. — On se propose de construire une droite (L) répondant à une ou à plusieurs des conditions suivantes :

1° passer par un point donné O;

2° rencontrer une droite donnée (D);

3° être parallèle à une droite donnée (Δ);

4° être dans un plan donné (P);

5° être perpendiculaire à un plan donné (Q).

Chercher à satisfaire à une seule condition, puis à deux, puis à trois, etc. C'est seulement quand le nombre de solutions est illimité qu'il y a lieu d'augmenter le nombre de conditions imposées à (L).

965. — 1° Soit un plan (P) perpendiculaire à une droite donnée (D). Dans (P) on trace une droite (D'). On réalise ainsi une figure qui montre que par (D') on peut faire passer un plan perpendiculaire à (D).

2° Inversement, on donne deux droites quelconques de l'espace (Δ) et (Δ'). Peut-on faire passer par (Δ') un plan perpendiculaire à (Δ)? Montrer que le problème est, en général, impossible et qu'il n'admet de solution que si (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires.

Trouver dans la salle de classe des droites qui ont cette propriété.



966. — Soit (P) et (Q) deux plans perpendiculaires se coupant suivant une droite (D) et A et B deux points de (D). On trace dans (P) la droite $x'Ax$ perpendiculaire à (D) et dans (Q) la droite $y'By$ perpendiculaire à (D). Soit M un point de $x'x$ et N un point de $y'y$.

1° Démontrer que les triangles AMN, ABN, ABM, BMN sont rectangles.

2° Établir les relations :

$$\overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{AB}^2,$$
$$\overline{AN}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{AB}^2.$$

3° On désigne par O, R, S, T les milieux respectifs des segments AB, AN, MN, BM, démontrer que le quadrilatère ORST est un rectangle et que l'on a :

$$4\,\overline{OS}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{AB}^2.$$

967. — ABCD est un rectangle. Soit $x'Cx$ la perpendiculaire passant par C au plan ABCD et $y'Dy$ la perpendiculaire en D au plan ABCD. On désigne par M un point de $x'x$ et N un point de $y'y$.

1° M étant donné, construire N de façon que les droites BM et AN soient perpendiculaires.

2° Démontrer qu'alors BM est perpendiculaire au plan ABN et que AN est perpendiculaire au plan ABM.

3° Démontrer que les triangles ABN, ABM, BMN et AMN sont rectangles et que le milieu O du segment MN est équidistant de A, B, M et N.

CHAPITRE XVI

PROJECTIONS VECTEURS

I. PROJECTIONS ORTHOGONALES SUR UN PLAN

246. Projection orthogonale d'un point sur un plan. — On appelle projection orthogonale (ou projection) d'un point sur un plan le pied de la perpendiculaire menée du point au plan.

Ainsi (*fig. 226*), le point *a*, où la perpendiculaire (Δ) à (P), menée par A perce le plan (P) est la *projection* du point A sur (P). La droite (Δ) s'appelle la *projetante* de A. On dit aussi que l'on a *projeté* A en *a* sur le plan (P). Le plan (P) est appelé *plan de projection*.

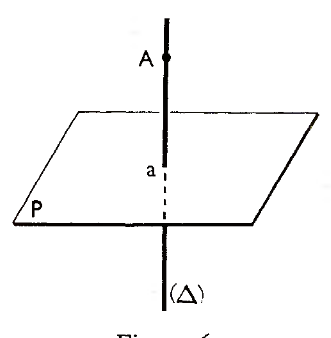


Fig. 226.

Tout point de l'espace a une projection bien déterminée. *La réciproque n'est pas vraie.* A une projection donnée *a* correspondent tous les points de la perpendiculaire (Δ) en *a* au plan.

Il est évident que tout point du plan est confondu avec sa projection.

247. Projection d'une droite. — Soit une droite (D) et un plan de projection (P), horizontal par exemple (*fig. 227*). Un point A de (D) se projette sur (P) en *a*, un autre point B de (D) se projette sur (P) en *b*. Les droites A*a*, B*b* sont des droites verticales.

1° Supposons d'abord qu'elles ne soient pas confondues. Elles sont alors parallèles et définissent un plan vertical (Q) qui coupe (P) suivant la droite (*d*) qui contient *a* et *b*.

Soit M un point quelconque de (D) et *m* sa projection sur (P). La droite M*m*, parallèle à la droite A*a* du plan (Q) et ayant un point M dans (Q), est contenue tout entière dans (Q); par suite *m* se trouve sur (*d*). Ainsi, les projections de tous les points de (D) sont situées sur (*d*).

Réciproquement, si *n* est un point de (*d*), la perpendiculaire (Δ) en *n* au plan (P) est une droite verticale; elle est donc parallèle à A*a* et comme elle a un

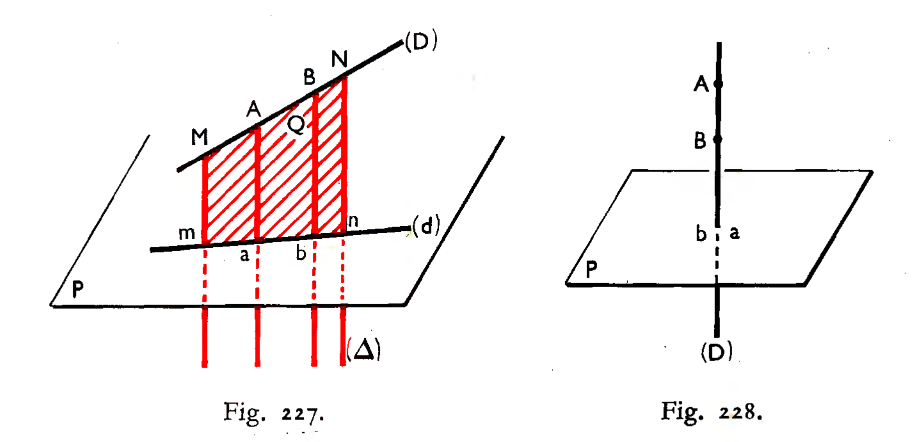


Fig. 227. Fig. 228.

point *n* dans (Q), elle est située dans (Q). La droite (Δ) coupe (D) en N et *n* est la projection de N sur (P).

2° Si A*a* et B*b* sont confondues, elles sont confondues avec (D) qui est alors une droite verticale. Les projections de tous ses points sont confondues avec le point *a* (*fig. 228*). Nous concluons :

▪ THÉORÈME. — ***Les projections des points d'une droite (D) sur un plan (P) décrivent une droite (d), si (D) n'est pas perpendiculaire au plan (P).***

Si (D) est perpendiculaire au plan de projection, les projections des points de (D) sont confondues avec la trace de (D) sur (P).

Dans le 1er cas, on dit que (*d*) est la *projection de la droite* (D) sur le plan. Le plan (D), (*d*) est dit le *plan projetant* de la droite (D).

Dans le 2^e cas, on dit que la projection de la droite (D) est un point.

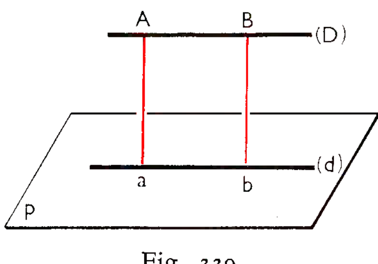


Fig. 229.

CAS PARTICULIERS. — 1° Si la droite (D) est parallèle au plan de projection (*fig. 229*) le plan projetant (Q) coupe (P) suivant une droite (*d*) parallèle à (D) (n° 224).

La projection (d) *d'une droite* (D) *parallèle au plan de projection est parallèle à* (D).

2° Il est évident que si (D) est dans le plan (P), elle est confondue avec sa projection.

248. Projections de droites concourantes. — Si deux droites (D) et (D′) non perpendiculaires au plan de projection se coupent en A, le point A se projette en *a* sur les projections (*d*) de (D) et (*d*′) de (D′) (*fig. 230*). Les projections (*d*) et (*d*′) ont donc au moins un point commun *a*. Elles ne peuvent être confondues que si les deux plans DA*a* et D′A*a* sont confondus, c'est-à-dire si le plan des deux droites est perpendiculaire au plan de projection (*fig. 231*).

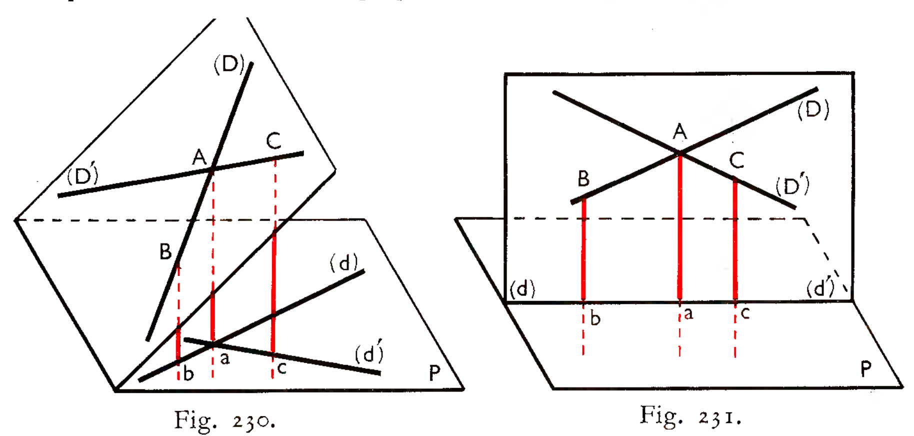


Fig. 230. Fig. 231.

▪ ***Les projections de deux droites sécantes non perpendiculaires au plan de projection sont des droites sécantes (ou confondues, si le plan des deux droites est perpendiculaire au plan de projection).***

Rappelons que si l'une des droites est perpendiculaire au plan de projection, sa projection est un point.

249. Projections de droites parallèles. — Soit deux droites parallèles (D) et (D′). Un point A de (D) se projette en *a* sur le plan de projection (P), un point A′ de (D′) se projette en *a*′ (*fig. 232*).

Les plans DA*a* et D′A′*a*′ contiennent deux couples de droites respectivement parallèles : (D) et (D′) d'une part; A*a* et A′*a*′ d'autre part. Ils sont donc parallèles et leurs intersections avec (P) sont deux droites (*d*) et (*d*′) parallèles (nº 227).

Il y a exception :

1º Si les deux droites parallèles sont dans un même plan perpendiculaire au plan de projection (P). Dans ce cas, les projections (*d*) et (*d*′) sont confondues (*fig. 233*).

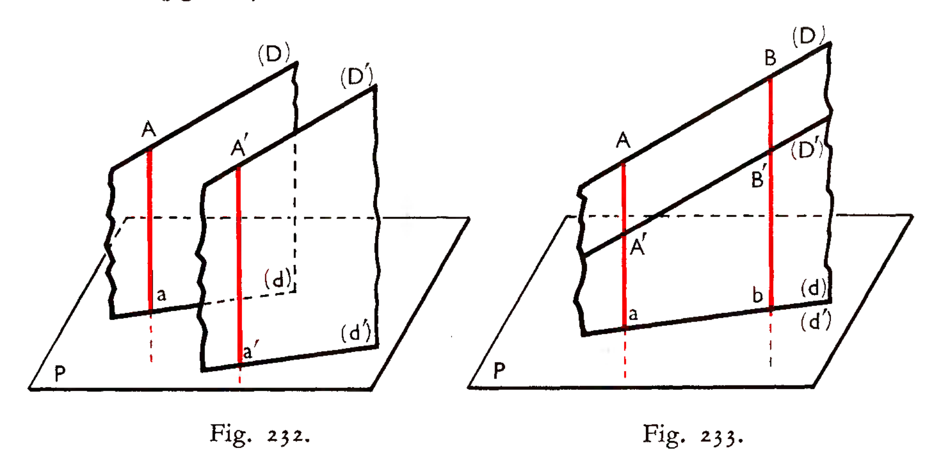


Fig. 232. Fig. 233.

2º Si les deux droites parallèles sont perpendiculaire à (P) : chacune d'elles se projette suivant un point.

▪ ***Deux droites parallèles, non perpendiculaires au plan de projection, se projettent suivant deux droites parallèles (ou exceptionnellement confondues).***

La réciproque n'est pas vraie : si les projections de deux droites sont parallèles cela prouve seulement que les plans projetants sont parallèles. Dans ces plans, on peut choisir deux droites quelconques. Mais la réciproque est vraie si l'on sait en outre que les deux droites sont dans un même plan.

Nous écrirons les implications suivantes :

Projections parallèles et droites quelconques	$\Longrightarrow$	plans projetants parallèles.
Projections parallèles et droites dans un même plan	$\Longrightarrow$	droites parallèles.

250. Projection d'un segment. — Soit un segment AB porté par une droite non perpendiculaire au plan de projection (P). Les extrémités se projettent respectivement en *a* et *b*. Lorsqu'un point M décrit le segment AB, sa projection décrit le segment *ab* (*fig. 234*). *La projection d'un segment est un segment* (ou exceptionnellement un point, si le support du segment est perpendiculaire au plan de projection). Les parallèles A*a*, B*b*, M*m* sont coupées par les sécantes AB et *ab*. On peut donc écrire :

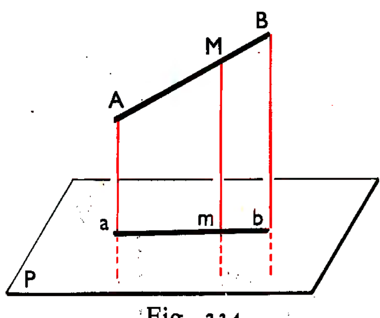


Fig. 234.

$$\frac{AM}{am} = \frac{MB}{mb} = \frac{AB}{ab}.$$

Ces relations expriment la proportionnalité des segments AB, AM, MB et de leurs projections respectives *ab*, *am*, *mb*. En particulier, si M est le milieu de AB, *m* est le milieu de *ab*.

▪ ***Lorsqu'on projette une droite sur un plan, les segments portés par la droite sont proportionnels à leurs projections respectives.***

Le milieu d'un segment se projette au milieu de la projection du segment.

251. Distance d'un point à un plan. — Soit un plan (P) et un point O non situé dans (P). Le point O se projette en H sur le plan. Joignons O à un point A autre que H, du plan (P). Le triangle OHA est rectangle en H et l'on a (*fig. 235*) :

$$OH < OA.$$

Le segment OH est inférieur au segment OA. Sa mesure est la *distance* du point O au plan (P).

☆ DÉFINITION. — ***La distance d'un point à un plan est la distance du point à sa projection sur le plan.***

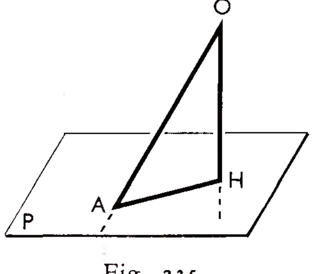


Fig. 235.

Le segment OA s'appelle une *oblique* au plan.

La mesure du segment HA s'appelle l'écartement de l'oblique OA. Les propriétés établies en géométrie plane s'étendent à l'espace. (Voir exercice n° 971).

252. Distance de deux plans parallèles. — Soit deux plans parallèles (P) et (Q). La droite AB perpendiculaire à (P) l'est aussi à (Q). Menons une autre perpendiculaire A′B′ aux deux plans (*fig. 236*).

Le quadrilatère AA′B′B est un rectangle et l'on a :

$$AB = A'B'.$$

Les segments AB et A′B′ sont égaux. Leur mesure commune est la plus courte distance d'un point de (P) à un point de (Q).

☆ DÉFINITION. — ***La distance de deux plans parallèles est la mesure d'un segment perpendiculaire aux deux plans et dont les extrémités sont dans chacun des plans.***

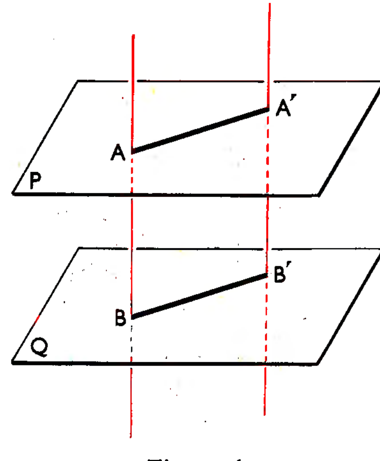


Fig. 236.

L'emploi du *trusquin d'ajusteur* utilise cette propriété pour tracer, sur un bloc de métal, une face parallèle à une face déjà dressée (*fig. 237*).

Applications.

968. — *Étudier les projections d'une droite sur deux plans parallèles.*

969. — 1° *Démontrer que la projection d'un parallélogramme sur un plan* (P) *non perpendiculaire au plan du parallélogramme est un parallélogramme.*
2° *Réciproquement, si un quadrilatère plan* ABCD *se projette suivant un parallélogramme, démontrer que* ABCD *est un parallélogramme.*

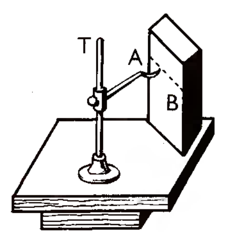


Fig. 237.

970. — *On donne deux droites* (D) *et* (D′) *non situées dans un même plan. Peut-on trouver un plan* (P) *sur lequel elles se projettent suivant deux droites parallèles ?*

971. — *On projette un point* O *en* H *sur un plan* (P) *ne passant pas par* O *et on trace deux obliques issues de* O *qui percent le plan* (P) *respectivement en* A *et* B.
1° *Établir l'équivalence logique :* $HA = HB \iff OA = OB$ *et énoncer les résultats.*
2° *On suppose que l'on a :* $BH > HA$. *Soit* A′ *le point du segment* HB *tel que l'on ait :* $HA' = HA$. *Comparer les segments* OA *et* OA′ *d'une part,* OB *et* OA′ *d'autre part. En déduire que l'on a :* $OB > OA$.
Étudier la réciproque. Énoncer les résultats.

II. VECTEURS

253. Vecteurs. — Rappelons qu'on appelle :

☆ ***1° Vecteur, un segment de droite supposé parcouru dans un sens déterminé;***
2° Sens du vecteur, le sens dans lequel il est parcouru;
3° Origine du vecteur, le point de départ du mobile qui parcourt le segment;
4° Extrémité du vecteur, le point d'arrivée du mobile;
5° Support du vecteur, la droite sur laquelle est située le vecteur.

On représente un vecteur par la notation : $\overrightarrow{AB}$, la première lettre étant l'origine, la seconde l'extrémité du vecteur (*fig. 238*). On énonce :

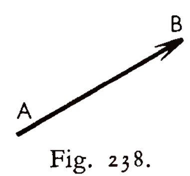


Fig. 238.

vecteur AB.

Il arrive aussi que l'on désigne un vecteur par une seule lettre $\overrightarrow{V}$ (*fig. 239*) s'il n'y a aucune confusion à craindre.

On peut envisager le cas où A et B sont confondus, on dit alors que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul. On écrit alors :

$$\overrightarrow{AB} = 0.$$

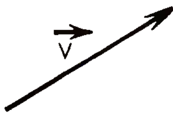


Fig. 239.

254. Mesure algébrique d'un vecteur. — Supposons que l'on ait :

1° orienté le support d'un vecteur (on obtient un *axe* $x'x$);
2° choisi une unité de longueur.

On a vu (classe de 4[e]) qu'on appelle, alors, *mesure algébrique* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ porté par l'axe $x'x$ le nombre relatif qui a :

1° pour valeur absolue la longueur du segment AB,

2° pour signe + ou — suivant que le sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le sens positif de l'axe ou le sens négatif.

On représente la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par la notation : $\overline{AB}$.

EXEMPLE. Sur la figure *240* on lit :

$$\overline{AB} = +3; \qquad \overline{CD} = -2$$
$$\overline{AC} = +6; \qquad \overline{DA} = -4$$

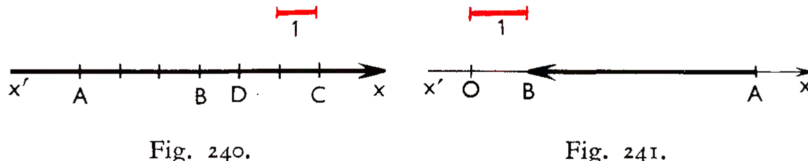


Fig. 240. Fig. 241.

Rappelons que, si l'on a choisi sur un axe un point initial O, la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{OA}$ porté par l'axe s'appelle *l'abscisse* du point A (*fig. 241*).

1° On a vu (classe de 4ᵉ) que si A, B, C sont trois points d'un axe, on a la relation de CHASLES :

$$\boxed{\overline{\mathbf{AC}} = \overline{\mathbf{AB}} + \overline{\mathbf{BC}}} \qquad (1)$$

qui s'écrit aussi : $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$ (2)

2° On en déduit que l'on a : $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

■ ***Quand un vecteur est porté par un axe, sa mesure algébrique est obtenue en retranchant l'abscisse de son origine de l'abscisse de son extrémité.***

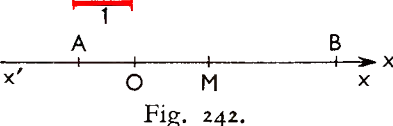


Fig. 242.

En posant : $\overline{OA} = a, \qquad \overline{OB} = b,$

on écrit : $\overline{AB} = b - a.$

La longueur du segment (ou longueur du vecteur) est :

$$AB = |b - a|$$

3° Si M est le *milieu* du segment AB porté par un axe de point initial O on a (*fig. 242*) :

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}).$$

Soit, en posant : $\overline{OM} = x$ (abscisse de M),
$\overline{OA} = a$ (abscisse de A),
$\overline{OB} = b$ (abscisse de B),

$$\boxed{x = \frac{a + b}{2}.}$$

255. Vecteurs de même direction. — Lorsque deux vecteurs ont des supports parallèles ou confondus on dit que ces vecteurs ont *même direction* ou encore qu'ils sont *colinéaires*.

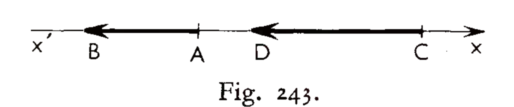


Fig. 243.

Si les supports sont confondus, on dit que les vecteurs ont *même sens* si leurs mesures algébriques ont le même signe (*fig. 243*).

Si les supports sont parallèles, on dit que les vecteurs ont *même sens* si, dans leur plan, ils sont situés d'un même côté de la droite qui passe par leurs origines (*fig. 244*).

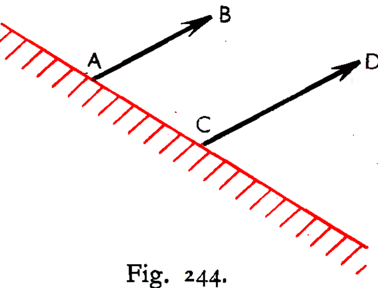


Fig. 244.

256. Vecteurs équipollents.

☆ ***On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont équipollents ou égaux pour exprimer que les segments AD et BC ont même milieu.***

Il est facile de montrer que cette disposition est réalisable. Donnons-nous un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et un point C. Traçons le segment BC, soit I son milieu. Le point D est alors le symétrique de A par rapport à I. Il existe donc un vecteur et un seul d'origine C et équipollent au vecteur $\overrightarrow{AB}$ (*fig. 245*).

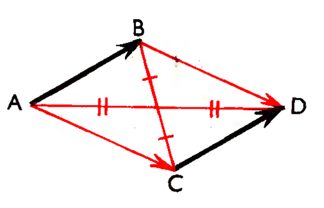
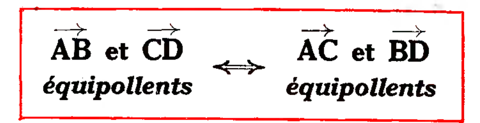


Fig. 245.

Il résulte de la définition que si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont équipollents, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont aussi équipollents et réciproquement.



Il est évident aussi que deux vecteurs nuls sont équipollents.

257. Propriétés de deux vecteurs équipollents.

1° Si les supports de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{CD}$ sont distincts, la figure ABDC est un parallélogramme. Les segments AB et CD sont égaux. Les points B et D

sont d'un même côté de la droite passant par A et C : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont alors même sens.

Réciproquement, si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont des supports parallèles, même longueur et même sens, ABDC est un parallélogramme et les diagonales AD et BC ont même milieu. Ces vecteurs sont donc égaux.

2° Si les supports de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{CD}$ sont confondus (*fig. 246*), choisissons un point initial O sur le support commun et un sens arbitraire. Nous définissons alors un axe.

A O B C D
x' x

Fig. 246.

L'abscisse du milieu de AD est : $\dfrac{\overline{OA}+\overline{OD}}{2}$.

L'abscisse du milieu de BC est : $\dfrac{\overline{OB}+\overline{OC}}{2}$.

On aura donc, puisque les segments AD et BC ont le même milieu :

$$\overline{OA}+\overline{OD}=\overline{OB}+\overline{OC} \qquad (1)$$

ou :

$$\overline{OB}-\overline{OA}=\overline{OD}-\overline{OC} \qquad (2)$$

soit :

$$\overline{AB}=\overline{CD}. \qquad (3)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont encore la même longueur et le même sens.

Réciproquement, si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même support, même longueur et même sens, on a :

$$\overline{AB}=\overline{CD} \qquad (3)$$

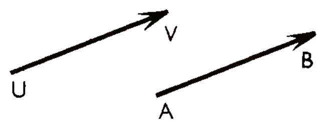
d'où l'on déduit la relation (1) qui traduit que les segments AD et BC ont le même milieu. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux. Nous aboutissons donc à l'équivalence logique suivante :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ***sont des vecteurs égaux***	$\Longleftrightarrow$	***Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont :*** ***des supports parallèles ou confondus;*** ***même longueur;*** ***même sens.***

On traduit l'équipollence (ou l'égalité) de deux vecteurs par l'écriture

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

qui se lit : vecteur $\overrightarrow{AB}$ équipollent (ou égal) au vecteur $\overrightarrow{CD}$. Cette écriture se justifie par ce que :



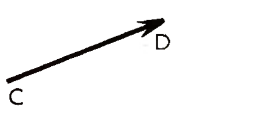


Fig. 247.

1° *l'équipollence est réciproque.* Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ on a aussi :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.$$

2° *deux vecteurs équipollents à un troisième sont équipollents.* Cela revient à dire que si l'on a (*fig. 247*) :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{UV} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{UV} \qquad (1)$$

on a aussi : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. (2)

En effet les égalités (1) expriment que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, la même longueur et le même sens que le vecteur $\overrightarrow{UV}$. Ils sont donc équipollents.

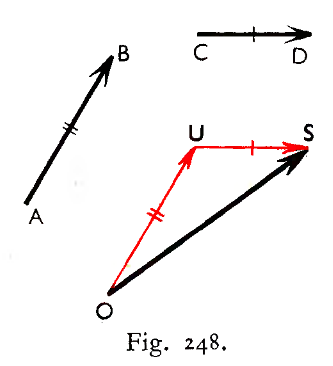


Fig. 248.

258. Somme de deux vecteurs.

☆ ***Étant donné deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et un point O arbitraire, on appelle somme relative à O de ces deux vecteurs, pris dans l'ordre énoncé, le vecteur $\overrightarrow{OS}$ obtenu en traçant le vecteur $\overrightarrow{OU}$, d'origine O, équipollent au vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis le vecteur $\overrightarrow{US}$, d'origine U, équipollent au vecteur $\overrightarrow{CD}$.***

On écrit (*fig. 248*) :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

259. Propriétés de la somme de deux vecteurs. — Le signe + utilisé est le même que le signe opératoire de la somme de deux nombres relatifs parce que la somme de deux vecteurs à la même propriété que la somme de deux nombres, à savoir :

1° *l'opération est toujours possible et conduit à un résultat unique;*

2° *la somme d'un vecteur nul et d'un vecteur* $\overrightarrow{V}$ *est égal à* $\overrightarrow{V}$;

3° *l'addition vectorielle est commutative.* En effet, pour construire la somme $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$, il faudrait mener d'abord $\overrightarrow{OU'}$ équipollent à $\overrightarrow{CD}$.

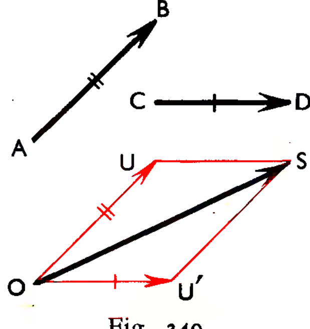


Fig. 249.

On aurait alors (*fig. 249*) :

$$\overrightarrow{US} = \overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{CD}$$

donc $$\overrightarrow{US} = \overrightarrow{OU'}$$

On en déduit : $\overrightarrow{U'S} = \overrightarrow{OU}$ (n° 256)

donc : $$\overrightarrow{U'S} = \overrightarrow{AB}.$$

On aboutit donc encore au point S en construisant $\overrightarrow{OU'}$ équipollent à $\overrightarrow{CD}$, puis $\overrightarrow{U'S}$ équipollent à $\overrightarrow{AB}$.

Notons, enfin, que la somme de deux vecteurs jouit des propriétés suivantes :

4° *la somme est conservée si l'on remplace l'un des vecteurs (ou chacun d'eux) par un vecteur qui lui est équipollent;*

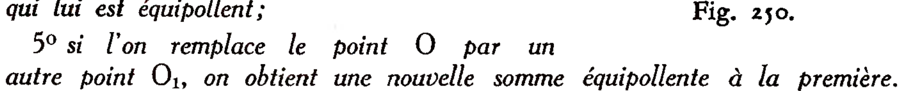


Fig. 250.

5° *si l'on remplace le point* O *par un autre point* O_1, *on obtient une nouvelle somme équipollente à la première.*

En effet, construisons la somme $\overrightarrow{O_1S_1}$ en menant (*fig. 250*)

$$\overrightarrow{O_1U_1} = \overrightarrow{OU} \qquad (1)$$

et $$\overrightarrow{U_1S_1} = \overrightarrow{US} \qquad (2)$$

De la relation (1) on déduit :

$$\overrightarrow{UU_1} = \overrightarrow{OO_1} \qquad (3)$$

De la relation (2) on déduit :

$$\overrightarrow{UU_1} = \overrightarrow{SS_1} \qquad (4)$$

Par suite on a :

$$\overrightarrow{SS_1} = \overrightarrow{OO_1} \qquad (5)$$

Donc : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{O_1S_1}$.

• REMARQUE. Dans le triangle OUS on a :

$$|OS - OU| < OS < OU + US$$

soit : $$|AB - CD| < OS < AB + CD.$$

La longueur de la somme de deux vecteurs est comprise entre la différence et la somme des longueurs des deux vecteurs.

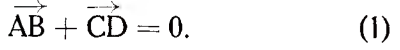
L'égalité : $$OS = AB + CD$$

n'a lieu que si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction et même sens.

L'égalité : $$OS = |AB - CD|$$

n'a lieu que si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction et des sens contraires.

260. Vecteurs opposés. — Il peut arriver qu'en construisant la somme de deux vecteurs, on obtienne un vecteur nul (*fig. 251*). On écrit alors :



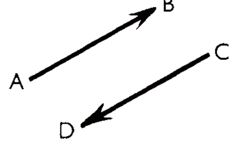
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 0. \qquad (1)$$

☆ DÉFINITION. — ***On dit que deux vecteurs sont opposés pour exprimer que leur somme est nulle.***

On convient d'écrire alors :

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}. \quad (2)$$

Il résulte, de la définition de la somme, que deux vecteurs opposés ont même direction, même longueur et des sens contraires. En particulier $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.



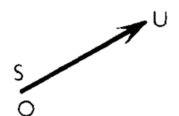


Fig. 251.

261. Projection orthogonale sur un plan. — Soit (P) un plan de projection et un vecteur $\overrightarrow{AB}$. Le point A se projette en A′ et le point B se projette en B′. Le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est dit *la projection du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ (*fig. 252*), on sait que tout point M du segment AB se projette en un point M′ du segment A′B′ (nº 250).

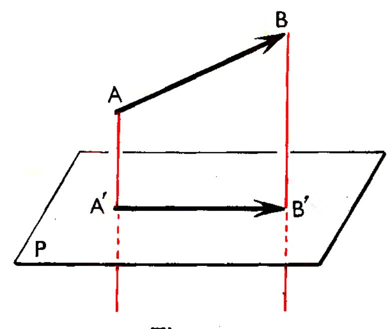


Fig. 252.

Notons que le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est nul si le support de $\overrightarrow{AB}$ est perpendiculaire au plan (P).

1° Remplaçons le plan (P) par un plan (Q) parallèle à (P). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour projection sur (Q), le vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ (*fig. 253*).

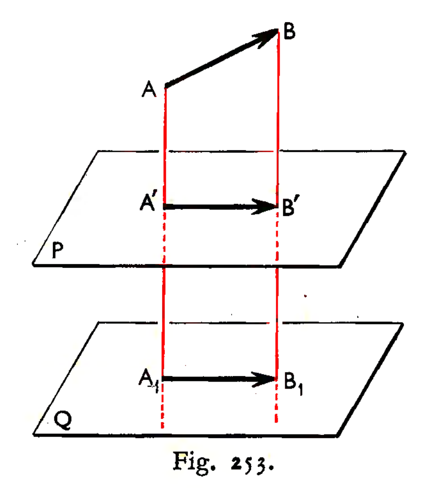


Fig. 253.

Le quadrilatère $A'B'B_1A_1$ est un rectangle puisque les plans parallèles (P) et (Q) découpent sur les projetantes $AA'A_1$ et $BB'B_1$ des segments égaux $A'A_1$ et $B'B_1$. On a donc :

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A'B'}.$$

▪ ***Les projections d'un vecteur sur deux plans parallèles sont des vecteurs égaux.***

2° Conservons le plan (P) et comparons les projections $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ de deux vecteurs équipollents $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

On sait que le milieu M commun des segments AD et BC se projette en M', milieu commun des segments A'D' et B'C'. Par suite les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont équipollents (*fig. 254*).

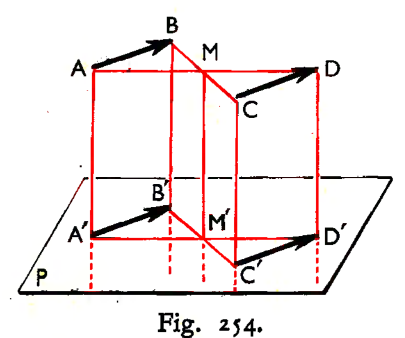


Fig. 254.

▪ ***Les projections de deux vecteurs équipollents sont des vecteurs équipollents.***

3° Soit un triangle OUS et les projections respectives O', U', S' de ses sommets O, U, S. On lit sur la figure *255* les deux relations :

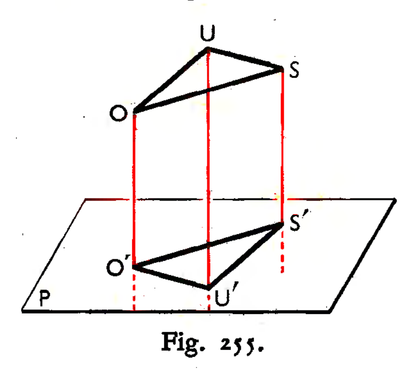


Fig. 255.

(1) $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{US}$

(2) $\overrightarrow{O'S'} = \overrightarrow{O'U'} + \overrightarrow{U'S'}$.

▪ ***La projection de la somme de deux vecteurs est la somme des projections des deux vecteurs.***

• **Applications.**

972. — 1° *Deux vecteurs ont la même longueur* l *et leurs supports sont perpendiculaires. Quelle est la longueur de leur somme ?*

2° *Deux vecteurs ont la même longueur* l *et l'un des angles formés par leurs supports est un angle de* 60°. *Quelle est la longueur de leur somme* (¶ 2 *cas*) ?

973. — *Représenter trois demi-droites* Ox, Oy, Oz *formant un trièdre trirectangle* (n° 245) *et placer sur ces demi-droites les points respectifs* A, B, C.

1° *Construire la somme* $\overrightarrow{OD}$ *des vecteurs* $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$.

2° *Construire la somme* $\overrightarrow{OE}$ *des vecteurs* $\overrightarrow{OC}$ *et* $\overrightarrow{OD}$.

974. — *Dans un plan, on donne deux points* O *et* S. *Construire, dans ce plan, deux vecteurs* $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ *de longueurs données* OA = a, OB = b, *tels que l'on ait :* :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

975. — *Dans un plan, on donne deux points* O *et* S. *Construire, dans ce plan, deux vecteurs* $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ *de même longueur* (*non donnée*) *et tels que l'on ait à la fois :*

$$\widehat{AOB} = 1 \text{ droit};$$
$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

976. — Démontrer que si M est un point du plan bissecteur du dièdre (P, AB, Q) il est équidistant des plans (P) et (Q).

977. — Soit un plan (P), un point A de (P) et un point O non situé dans (P). On trace, dans (P), une droite (D) passant par A. On projette O en H sur (P) et en M sur (D).

1° Démontrer que l'angle $\widehat{HMD}$ est droit.

2° Trouver la droite (D) pour que le segment OM soit le plus court possible.

978. — On suppose que les côtés Ax et Ay d'un angle droit $\widehat{xAy}$ coupent respectivement un plan (P) en B et C. Le point A se projette en A′ sur (P). Soit O le milieu du segment BC.

1° Démontrer que le triangle OA′A est rectangle (en supposant, naturellement, que les points O, A′ et A sont les sommets d'un triangle).

2° En déduire que l'on a : OA′ < OB et que l'angle $\widehat{BA'C}$ est obtus ou plat.

979. — A, B, C, D étant les sommets d'un tétraèdre, montrer que l'on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

980. — Deux triangles équilatéraux ABC et DBC ont un côté commun BC. Ils sont situés dans deux demi-plans qui forment un dièdre de 60°.

1° Soit M le milieu de BC. Montrer que BC est perpendiculaire au plan AMD. Évaluer l'angle $\widehat{AMD}$. Montrer que le triangle AMD est équilatéral.

2° Calculer le côté AD en fonction de BC = *a*.

3° Calculer la distance de D au plan ABC.

981. — On donne un carré ABCD, de côté AB = *a*. On mène en A la perpendiculaire au plan du carré et on marque sur cette droite un point S tel que AS = *a*.

1° Calculer les mesures des segments SB, SC, SD.

2° Démontrer que le plan ASB est perpendiculaire à BC.
On projette A en M sur SB, montrer que la droite AM est perpendiculaire au plan SBC. Calculer AM.

3° Calculer la distance de A au plan SCD.

4° Calculer la distance de A à la droite SC.

5° Démontrer que la projection de A sur le plan SBD est alignée avec S et le centre O du carré. Calculer la distance de A au plan SBD.

EXERCICES DE REPRÉSENTATION

NOTE. — *Les dessins figurant aux pages suivantes sont à reproduire à une échelle arbitraire et selon les indications relatives à chaque figure.*

982. — Deux plans (P) et (Q) sécants admettent la droite *xy* comme droite commune *(fig. 256)*.

Une droite (D) les perce respectivement en A et B (voir ponctuation).
Ponctuer de même la droite (Δ) qui les perce en C et D.
Colorier (P) et (Q) différemment.

983. — (P), (Q), (R) sont trois plans ayant une droite commune AB.

Une portion de plan (S) (angle $\widehat{xOy}$) est limitée aux demi-droites O*x* et O*y* *(fig. 257)*.

O*x* perce (P), (Q), (R) respectivement en C, E, G ; O*y* perce (P), (Q), (R) respectivement en D, F, H.
Ponctuer les segments CEG et DFH.
Colorier les plans (P), (Q), (R), (S) par des couleurs différentes.
(Noter que les droites CD, EF, GH, AB sont concourantes et expliquer pourquoi.)

984. — (P) et (Q) : plans sécants,
xy : droite commune à (P) et (Q),
(D) et (Δ) : droites de (P) sécantes en O sur xy,
(L) et (M) : droites de (Q) sécantes en O sur xy.

Achever la ponctuation *(fig. 258)*.

Colorier (P) et (Q).

985. — ABC : triangle,
(P) et (Q) : deux plans parallèles.
A se projette sur (P) et (Q) respectivement en a et a'.
B — — — b et b'.
C — — — c et c'.

Ponctuer les projetantes Aaa', Bbb', Ccc' *(fig. 259)*.

Noter la nature des quadrilatères $abb'a'$, $bcc'b'$, $acc'a'$.

986. — ABCD est une plaque rectangulaire dont le plan est perpendiculaire au plan (P).
S est une source lumineuse (réduite théoriquement à un point).
La droite SD perce le plan (P) en F.

Construire le point G où la droite SA perce (P) *(fig. 260)*.

Colorier l'ombre BCFG portée par le rectangle AMCD sur le plan (P).

987. — ABCDEF est un prisme droit triangulaire posé sur le plan (P) de la face DEF.
S est une source lumineuse.
La droite SA perce le plan (P) en a *(fig. 261)*.

Construire le point b où SB perce (P) et le point c où SC perce (P).

Colorier l'ombre DabcF portée par le prisme sur le plan (P).

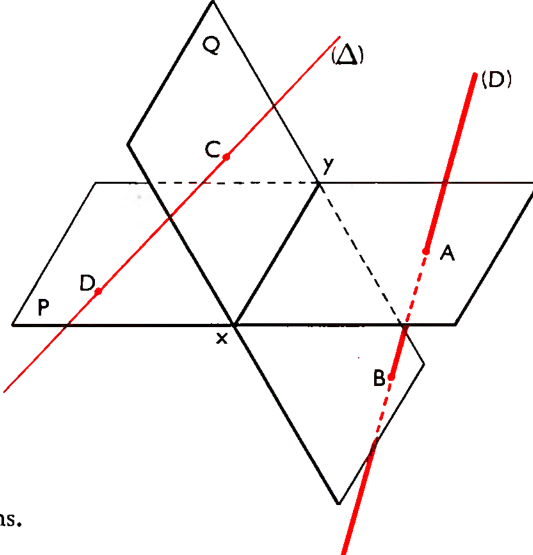


Fig. 256.
Intersection de droites et de plans.

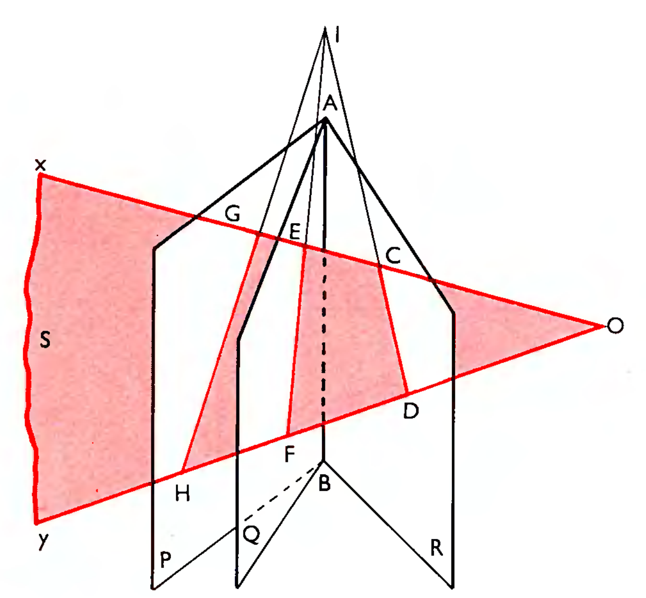


Fig. 257.
Intersections de plans.

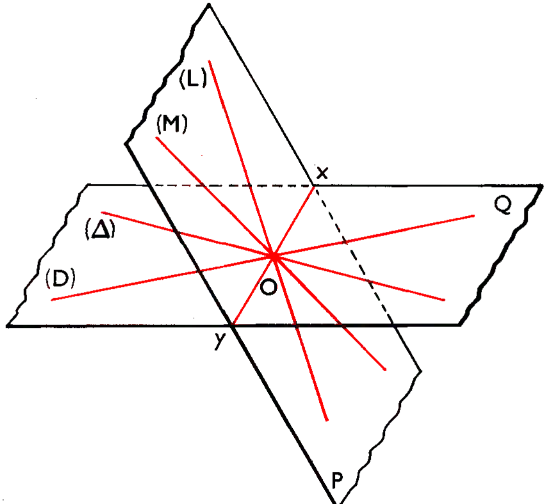


Fig. 258.

Droites concourantes dans l'espace.

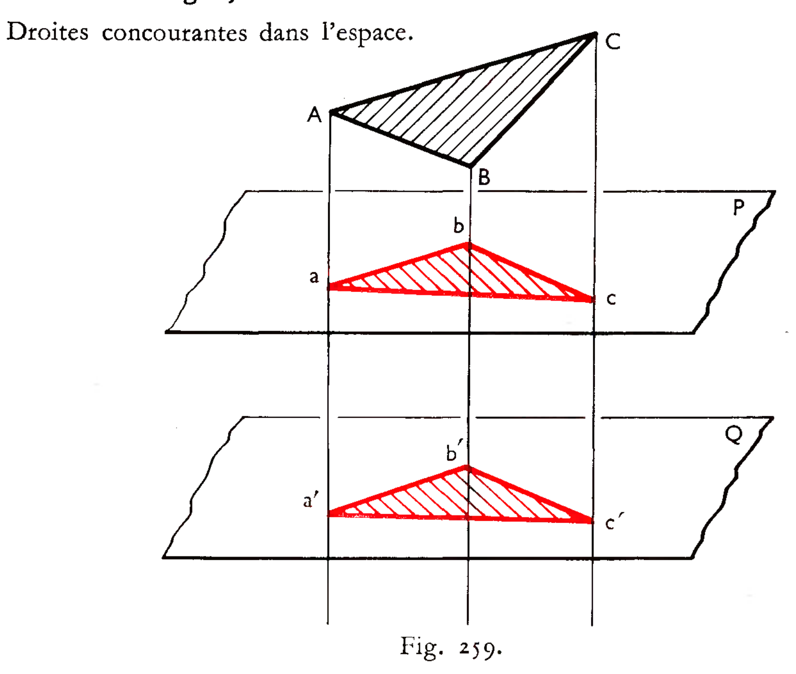


Fig. 259.

Projections d'un triangle sur deux plans parallèles.

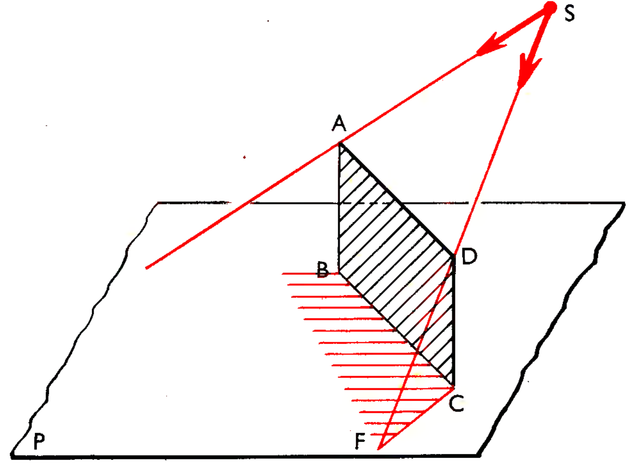


Fig. 260.
Ombre portée par une plaque rectangulaire.

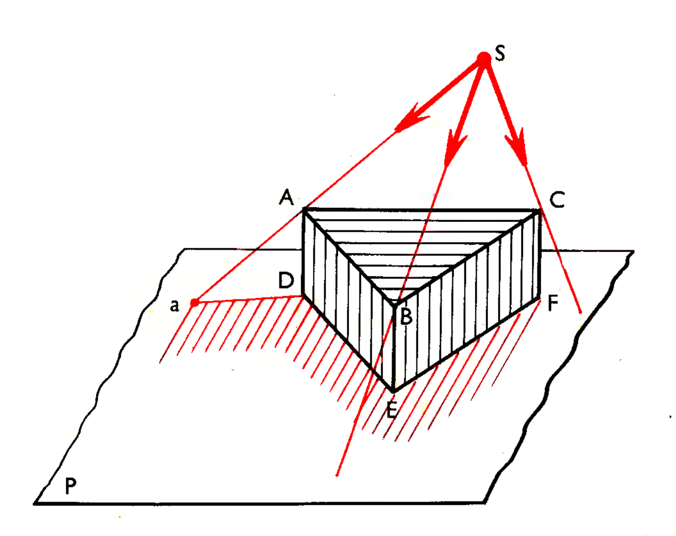


Fig. 261.
Ombre portée par un prisme droit sur le plan d'une base.

CHAPITRE XVI

ASTRONOMIE

I. REPÉRAGE DES ASTRES

262. Sphère des fixes. — Nous avons vu, dans le cours de 5e (n° 267), qu'un observateur terrestre situe tous les astres sur une sphère dont le centre est le point de la terre où il stationne et dont il ignore le rayon. C'est cette sphère fictive qui est appelée *sphère céleste locale.* On peut, sans grande erreur, supposer que son centre est le centre de la terre, les dimensions de la terre étant négligeables par rapport aux distances des astres.

Nous avons aussi vu (5e, n° 268), qu'en raison du *mouvement diurne* chaque astre semble décrire sur la sphère céleste locale un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'*axe du monde,* ce qui nous a amenés à classer les étoiles en trois catégories pour tout lieu d'observation de latitude différente de 0 et de 90°.

Pour mieux réaliser le mouvement diurne dans son ensemble, un observateur peut imaginer que sa sphère céleste locale, qu'il suppose immobile, est doublée d'une sphère de même centre sur laquelle sont placés tous les astres et qui tourne autour de l'axe du monde d'un mouvement uniforme, dans le sens du mouvement diurne, en faisant un tour en un *jour sidéral.* C'est à cette seconde sphère (*fig. 262*) que l'on donne le nom de *sphère des fixes.* On l'appelle ainsi parce que les *étoiles* restent *fixes les unes par rapport aux autres* sur cette sphère mobile.

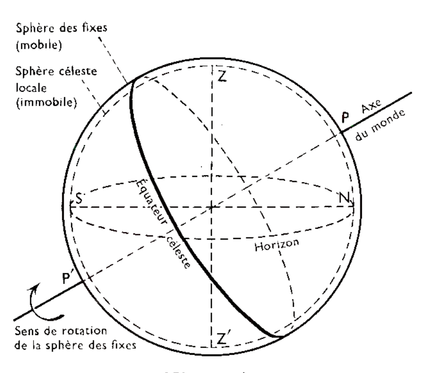


Fig. 262.

263. Coordonnées équatoriales. — Les coordonnées horizontales (5e, n° 269), liées à la sphère céleste locale de chaque observateur et variables avec le temps, ne se prêtent pas aux échanges de renseignements entre les différents observateurs. C'est pour cette raison que l'on a introduit les *coordonnées équatoriales* prises *sur la sphère des fixes* de la manière suivante (*fig. 263*) :

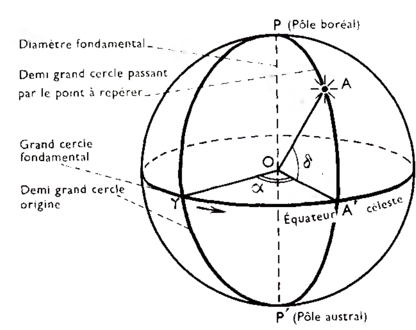


Fig. 263.

le *diamètre fondamental* est l'axe du monde PP′ qui coupe la sphère des fixes en deux points appelés respectivement *pôle boréal*, P, et *pôle austral*, P′; le pôle boréal est voisin de l'étoile polaire;

le *grand cercle fondamental*, dont le plan est perpendiculaire à PP′, s'appelle l'*équateur céleste*; il divise la sphère des fixes en un hémisphère boréal et en un hémisphère austral;

le *demi-cercle* PAP′, passant par l'astre A à repérer, coupe l'équateur céleste en A′;

le *demi-cercle origine* PγP′ passe par le point γ de l'équateur céleste; ce point remarquable γ est celui où le soleil, dans son mouvement apparent par rapport aux étoiles, traverse l'équateur à l'équinoxe du printemps.

En désignant par O le centre de la sphère des fixes, nous pouvons repérer l'astre A par les angles suivants :

$$\widehat{\gamma OA'} = \alpha, \quad \text{appelé } \textit{ascension droite},$$
$$\widehat{AOA'} = \delta, \quad \text{appelé } \textit{déclinaison}.$$

L'ascension droite α est exactement l'angle balayé par une demi-droite allant du côté Oγ sur le côté OA′ en tournant dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre pour un observateur fictif placé au pôle boréal P. Ce sens a été choisi pour que les étoiles passent au méridien de chaque lieu dans l'ordre de leurs ascensions droites croissantes. L'unité d'angle employée est assez insolite, c'est l'heure; 24 heures représentent 4 droits, les sous-multiples étant la minute et la seconde avec leurs définitions habituelles.

La déclinaison δ est un nombre relatif dont la valeur absolue est nulle à l'équateur et égale à 90° à chacun des pôles; elle est positive pour un astre de l'hémisphère céleste boréal, négative pour un astre de l'hémisphère céleste austral.

• **Exercices.**

988. — *Existe-t-il une sphère céleste locale sur laquelle la hauteur de chaque étoile ne varie pas avec le temps ?*

989. — *Comparer le plan de l'horizon et celui de l'équateur céleste dans les deux cas suivants :*
1° *le lieu de l'observation est l'un des pôles terrestres;*
2° *le lieu de l'observation est sur l'équateur terrestre.*
En déduire que l'on peut mesurer la déclinaison d'un astre à l'aide d'un théodolite lorsque l'on stationne à l'un des pôles terrestres.

990. — 1° *Quelle est la mesure en degrés d'une heure d'ascension droite ? la mesure en minutes d'angle d'une minute d'heure d'ascension droite ? la mesure en secondes d'angle d'une seconde d'ascension droite ?*
2° *Transformer en degrés, minutes et secondes d'angle l'ascension droite de l'étoile Sirius, qui est 6 h 42 mn 57 s.*

991. — *En un lieu, il est 0 h sidérale lorsque le point γ passe au méridien de ce lieu. Quelle est l'ascension droite d'un astre qui passe au méridien de ce lieu lorsque l'horloge sidérale marque 21 h 13 mn 4 s ?* (¶ Rappelons que l'horloge sidérale est réglée sur le jour sidéral, durée d'une rotation de la terre sur son axe.)

II. ÉCLIPSES

264. Ombre et pénombre d'un corps sphérique éclairé par le soleil. — Le soleil est une sphère lumineuse dont le rayon est 109 R, R étant le rayon de la terre. Lorsqu'un corps sphérique est éclairé par le soleil, il se forme derrière ce corps des zones d'ombre et de pénombre.

D'une manière précise, soit deux cercles extérieurs de centres respectifs S et O (*fig. 264*), le premier ayant un rayon supérieur au second. La droite SO est un axe de symétrie pour la figure. Par rotation autour de cette droite les cercles engendrent une sphère de centre S, qui peut représenter le soleil, et une sphère de centre O, qui peut représenter l'objet sphérique.

Nous admettrons l'existence pour les deux cercles considérés de :

1° deux *tangentes communes extérieures* symétriques par rapport à la droite SO et sécantes en E sur cette droite;

2° deux *tangentes communes intérieures* symétriques par rapport à la droite SO et sécantes en I sur cette droite.

Si l'on fait tourner autour de la droite SO les tangentes communes elles engendrent des cônes de sommet E et I qui déterminent, avec les deux sphères

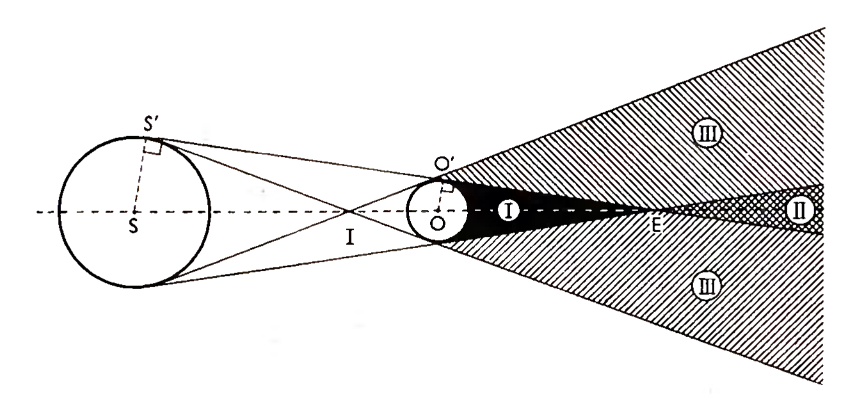


Fig. 264.

engendrées par les cercles, des régions de l'espace numérotées I, II et III sur la figure.

La zone I est une zone d'ombre : un observateur qui y est placé ne voit pas le soleil, car aucun rayon lumineux issu du soleil ne parvient *directement* dans cette zone.

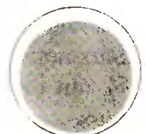


Fig. 265.

Les zones II et III sont des zones de pénombre : un observateur qui y est placé ne voit qu'une partie du soleil, l'autre partie lui étant cachée par le corps sphérique de centre O. Dans ces zones tous les rayons lumineux issus du soleil ne parviennent pas à l'observateur; il n'y fait pas nuit, mais le jour est plus ou moins atténué. Les aspects du soleil sont différents suivant qu'il est vu par un observateur placé dans la zone II ou dans la zone III. Dans la zone II l'aspect du soleil est donné par la *figure 265* : l'observateur voit un anneau brillant de disque solaire. Dans la zone III l'aspect du soleil est donné par la *figure 266* : l'observateur voit un croissant du disque solaire.



Fig. 266.

265. Mouvement apparent du soleil sur la sphère des fixes. — Nous avons vu en 5[e] (n° 270) que le soleil parcourt au cours d'une année les douze constellations du zodiaque. Il semble décrire sur la sphère des fixes un grand cercle appelé *écliptique* (*fig. 267*). L'angle dièdre que fait le plan de l'écliptique

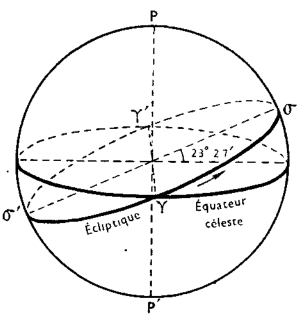


Fig. 267.

avec le plan de l'équateur céleste mesure 23°27'; c'est l'*inclinaison de l'écliptique sur l'équateur*. L'écliptique coupe l'équateur en deux points, γ et γ'; le premier est la position du soleil à l'équinoxe de printemps, c'est par ce point que passe le demi grand cercle origine pour la mesure de l'ascension droite (n° 263).

266. Mouvement apparent de la lune sur la sphère des fixes. — Nous avons vu en 5e (n° 275) que la lune parcourt en une lunaison les constellations du zodiaque. Elle semble décrire sur la sphère des fixes un grand cercle appelé *orbite lunaire* voisin de l'écliptique (*fig. 268*). Mais le plan de l'orbite lunaire fait avec celui de l'écliptique un angle dièdre de 5° environ, c'est l'*inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique*. L'orbite lunaire coupe l'écliptique en deux points, N et N', appelés respectivement *nœud ascendant* et *nœud descendant*.

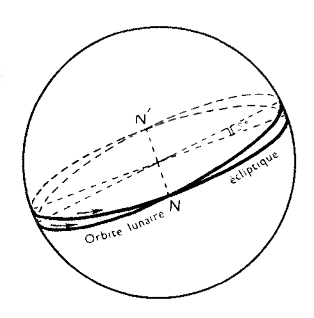


Fig. 268.

Le passage de la lune aux nœuds n'est pas lié aux phases de la lune. La lunaison, durée qui sépare deux nouvelles lunes consécutives, mesure 29 j 12 h 44 mn (5e, n° 274) alors que la durée qui sépare deux passages consécutifs de la lune au nœud ascendant mesure 27 j 5 h 6 mn.

267. Éclipses. I. **Éclipse de lune.** — Supposons que le corps sphérique éclairé par le soleil de la *figure 264* soit la terre. On peut calculer (voir exercice n° 992) que la lune peut pénétrer entièrement dans les zones I et III de l'ombre et de la pénombe de la terre, mais pas dans la zone II. Elle doit évidemment franchir la zone III pour entrer dans la zone I. Il y a alors *éclipse de lune* pour tout observateur terrestre qui peut voir la lune.

Lorsque ce phénomène se produit la terre se trouve entre le soleil et la lune; c'est donc au moment de la *pleine lune* que peut se produire une éclipse de lune.

Avant d'entrer dans la pénombre la lune apparaît comme un disque brillamment éclairé. Quand elle traverse la zone III, sa luminosité décroît d'une façon imperceptible. Dès qu'elle atteint la zone I elle est éclipsée, c'est-à-dire progressivement plongée dans l'obscurité. L'*éclipse* peut être *partielle* : un

croissant plus ou moins important de la lune reste visible. L'*éclipse* peut être *totale* : la lune est alors complètement cachée.

Il peut arriver que la lune passe dans la zone III uniquement; c'est une *éclipse de pénombre*, pratiquement imperceptible.

Par suite de la réfraction de la lumière solaire dans l'atmosphère terrestre la lune éclipsée reste faiblement éclairée d'une couleur rougeâtre.

Une éclipse de lune peut durer 4 heures.

II. **Éclipse de soleil.** — Supposons que le corps sphérique éclairé par le soleil de la *figure 264* soit la lune. On peut calculer (voir exercice n° 993) qu'une partie de la terre peut se trouver dans les zones I, II ou III de l'ombre et de la pénombre de la lune. Il y a alors *éclipse de soleil* en chaque point de la terre situé dans l'une de ces zones.

Lorsque ce phénomène se produit la lune se trouve entre le soleil et la terre; c'est donc au moment de la *nouvelle lune* que peut se produire une éclipse de soleil.

Un observateur de la terre placé dans la zone I ne voit pas le soleil; pour lui il y a *éclipse totale*.

Un observateur de la terre placé dans la zone II ne voit qu'un anneau du soleil; pour lui il y a *éclipse annulaire* (*fig. 265*).

Un observateur de la terre placé dans la zone III ne voit qu'un croissant du soleil; pour lui il y a *éclipse partielle* (*fig. 266*).

En un lieu de la terre l'éclipse totale de soleil est très courte; dans les conditions les plus favorables le temps pendant lequel le soleil est entièrement invisible est de l'ordre de 6 minutes.

III. **Possibilité des éclipses.** — Pour qu'il y ait éclipse, il faut que les centres du soleil, de la terre et de la lune soient à peu près alignés.

Si le plan de l'orbite lunaire était confondu avec le plan de l'écliptique, l'alignement rigoureux des centres des trois astres serait réalisé deux fois par lunaison : d'abord au moment de la nouvelle lune où il y aurait éclipse de soleil, puis au moment de la pleine lune où il y aurait éclipse de lune.

Du fait de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique, l'alignement approximatif des centres des trois astres n'est réalisé que lorsque la nouvelle lune ou la pleine lune ont lieu quand la lune est au voisinage de l'écliptique. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on a donné le nom d'écliptique à la trajectoire apparente du soleil sur la sphère des fixes.

• **Exercices.**

992. — *On suppose que la figure 264 représente le soleil de centre* S *et la terre de centre* O; *on désigne par* R *le rayon de la terre.*
1° *Déterminer, en fonction de* R, *la longueur* OE, *sachant que* $OO' = R$, $SS' = 109\,R$, $SO = 23\,400\,R$. (¶ Utiliser les triangles semblables EOO′ et ESS′.)
2° *Déduire du 1° que la lune, dont le centre est à une distance de* O *égale à* 60 R, *ne peut rencontrer que la zone I d'ombre de la terre et jamais la zone II de pénombre.*
3° *On désigne par* L *le point du segment* OE *tel que* $OL = 60\,R$. *La perpendiculaire en* L *à la droite* SE *coupe la droite* S′E *en* L′. *Calculer, en fonction de* R, *la longueur* LL′. (¶ Utiliser les triangles semblables ELL′ et EOO′.)
4° *Déduire de ce qui précède la possibilité pour la lune de se trouver entièrement dans la zone I d'ombre de la terre, sachant que le rayon de la lune est* $\frac{3}{11}$ R.

993. — *On suppose que la figure 264 représente le soleil de centre* S *et la lune de centre* O; *on désigne par* R *le rayon de la terre.*
1° *Déterminer, en fonction de* R, *la longueur* OE, *avec les données suivantes :*

$$SS' = 109\,R, \quad OO' = \frac{3}{11}\,R, \quad SO = 23\,340\,R.$$

2° *Déduire du 1° que la terre peut rencontrer soit la zone I d'ombre, soit la zone II de pénombre de la lune, sachant que la distance du centre de la terre à celui de la lune varie entre* 55 R *et* 64 R.

III. DIMENSIONS ET DISTANCES DES ASTRES

268. Diamètre apparent des astres. — Par expérience, nous savons qu'un objet linéaire ou sphérique indéformable semble de plus en plus petit lorsqu'il s'éloigne. En réalité ce n'est pas la longueur ou le diamètre de l'objet qui varie, mais l'*angle sous lequel est vu* cet objet.

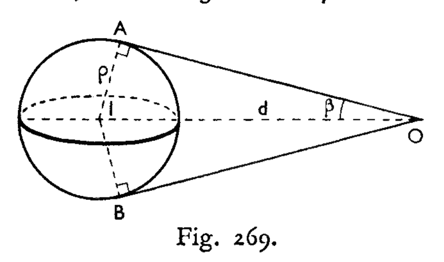


Fig. 269.

Lorsque d'un point O l'on observe un objet sphérique de centre I (*fig. 269*), on appelle *diamètre apparent* de cet objet l'angle $\widehat{AOB}$ que font les tangentes menées de O à un grand cercle obtenu en coupant la sphère par un plan contenant la droite OI.

Pour un observateur terrestre le diamètre apparent du soleil est variable entre 32′ et 32′31″, celui de la lune est variable entre 29′24″ et 33′28″. Il n'y a donc pas de grande différence entre les diamètres apparents des deux astres; il suffit de retenir qu'ils sont de l'ordre de 32′.

Les diamètres apparents des planètes sont petits; par exemple, ceux de Vénus et Mars peuvent atteindre respectivement 66″ et 26″.

Enfin le diamètre apparent des étoiles est infime.

La connaissance du diamètre apparent et de la distance d'un astre permettent de calculer son rayon; le triangle rectangle AIO de la *figure 269* donne :

$$\frac{\rho}{d} = \sin\beta \qquad \text{ou} \qquad \rho = d\sin\beta,$$

en désignant par ρ le rayon de l'astre, par d sa distance et par β le demi diamètre apparent.

269. Distance de la terre au soleil et à la lune. — Supposons le centre S du soleil (*fig. 270*) dans le plan d'un méridien de la terre et deux points A et B de ce méridien d'où l'on voit S respectivement à l'horizon et au zénith. En désignant par T le centre de la terre, l'angle $\widehat{ATB}$ peut se déduire des latitudes de A et B. On connaît ainsi l'angle $\widehat{AST}$ qui est le complément de l'angle $\widehat{ATB}$. L'angle $\widehat{AST}$ est appelé la *parallaxe horizontale* du soleil : c'est l'angle sous lequel un rayon terrestre serait vu du soleil. Cet angle varie en restant voisin de 9″. En désignant par R le rayon terrestre, par d la distance TS du centre de la terre à celui du soleil et par p la parallaxe horizontale du soleil, le triangle rectangle ATS donne :

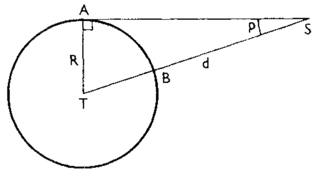


Fig. 270.

$$\frac{R}{d} = \sin p \qquad \text{ou} \qquad d = R\sin p.$$

On trouve que la valeur moyenne de d est 23 400 R.

On opère de même pour la lune; sa parallaxe horizontale varie aux environs de 57′, ce qui donne 60 R comme valeur moyenne de la distance de son centre à celui de la terre.

Dans le cours de 4e (n° 284) nous avons vu que la distance moyenne du centre de la terre à celui du soleil, 23 400 R ou 15×10^7 km, s'appelle *unité astronomique* (en abrégé U. A.).

270. Distance du système solaire aux étoiles. — Le procédé du n° 269 ne peut pas être utilisé pour trouver la distance de la terre à une étoile, car la parallaxe horizontale d'une étoile est pratiquement nulle.

Pour déterminer la distance d'une étoile on a donc choisi un segment plus long que le rayon terrestre, segment qui aurait quelque chance d'être vu de

l'étoile sous un angle non nul; ce segment est le segment ST joignant le centre du soleil à celui de la terre (*fig. 271*). On appelle *parallaxe annuelle* d'une étoile E l'angle $\widehat{SET}$ sous lequel le segment ST, dont la longueur est 1 U. A., serait vu de l'étoile.

Malgré ce choix les parallaxes annuelles des étoiles sont très petites, aucune n'atteint 1″. La parallaxe annuelle de l'étoile α Centaure, la plus proche du système solaire, est 0″,76.

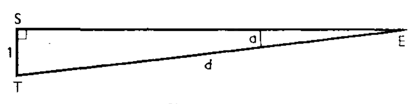


Fig. 271.

La mesure de la parallaxe annuelle d'une étoile est une opération très délicate; on la fait par des procédés photographiques.

Si l'on prend l'unité astronomique comme unité de longueur, le triangle STE (*fig. 271*), que nous supposons rectangle en S, a pour côté de l'angle droit ST, de mesure 1 ; si d désigne la mesure de l'hypoténuse TE et a la parallaxe annuelle de l'étoile E, nous trouvons :

$$\frac{1}{d} = \sin a \qquad \text{ou} \qquad d = \frac{1}{\sin a}.$$

Pour l'étoile α Centaure $d = 270\,000$ U. A.

Rappelons que nous avons vu (4[e], n° 284) que l'on utilise pour les distances des étoiles une unité appelée *parsec*. Nous pouvons préciser sa définition et mieux comprendre son nom : le *parsec* (en abrégé ps) est la distance d'une étoile dont la *par*allaxe annuelle serait 1 *sec*onde. D'après la relation ci-dessus :

$$1 \text{ ps} = \frac{1}{\sin 1''} = 206\,265 \text{ U. A.}$$

On démontre, et nous l'admettrons, que lorsque a est la mesure en secondes de la parallaxe annuelle, la distance d de l'étoile est donnée par la formule :

$$d \simeq \frac{1}{a} \text{ ps}.$$

La mesure en parsecs de la distance d'une étoile est donc approximativement l'inverse de la mesure en secondes de sa parallaxe annuelle.

Pour l'étoile α Centaure, l'on trouve ainsi :

$$d \simeq \frac{1}{0{,}76} \text{ ps} \simeq 1{,}32 \text{ ps}.$$

Rappelons encore l'unité de distance vue en classe de 4[e] (n° 284) et appelée *année-lumière* (en abrégé : $a - l$) et que :

$$1 \text{ ps} \simeq 3{,}26\ a - l.$$

• Exercices.

994. — 1° *Calculer le diamètre apparent de la lune vue d'un satellite artificiel lorsqu'il passe à 7 000 km de l'astre.*
2° *Calculer le diamètre apparent de la terre vue de la lune.* (¶ Utiliser la parallaxe horizontale de la lune.)

995. — 1° *La parallaxe annuelle de l'étoile Véga* (α *Lyre*) *est* 0",121. *Déterminer sa distance en parsecs et en années-lumière.*
2° *Même problème pour l'étoile Sirius* (α *Grand Chien*) *dont la parallaxe annuelle est* 0",373.

996. — *Calculer les parallaxes annuelles des étoiles suivantes dont les distances sont données en parsecs :*

ÉTOILE	RÉGULUS	CAPELLA	ARCTURUS	RIGEL	ALTAÏR	ALDÉBARAN
Distance	26	14	11	200	5	21

997. — 1° *Comment peut-on interpréter les variations des diamètres apparents du soleil et de la lune ?*
2° *A l'aide des valeurs limites données pour ces diamètres apparents au n° 268, vérifier qu'une éclipse de soleil peut être totale ou annulaire.*

998. — *A quelle distance faut-il placer une sphère de* 1 *m de rayon pour que son diamètre apparent soit égal à celui de la lune ?*

999. — *L'étoile* α *Centaure est une étoile double, c'est-à-dire composée de deux étoiles qui tournent l'une autour de l'autre. La distance moyenne des deux « composantes » est* 23,3 UA. *Transformer cette distance en kilomètres.* (¶ Utiliser une puissance de 10.)

1000. — *Le système solaire fait partie de la Galaxie dont une apparence est la Voie lactée. La galaxie a la forme d'une lentille dont le diamètre mesure* 60 000 ps. *Transformer cette distance en années-lumière.* (¶ Utiliser une puissance de 10.)

TABLE DES MATIÈRES

Imprimé en France par Brodard-Taupin, Imprimeur-Relieur. Coulommiers-Paris.
55140-I-4-1835. Dépôt légal nº 1623. 2e trimestre 1960.



IMPRIMÉ EN FRANCE
IMP. L. SCHMIT, 80 BIS, RUE DES PLANTES, PARIS
11-50